2 Wirkung der Kräfte

Kräfte, die auf einen Körper wirken, werden diesen verschieben, wenn kein gleichgroßer Widerstand dagegen wirkt. Dabei wird angenommen, dass die Wirkungslinie der Kraft durch den Schwerpunkt des Körpers geht. Hierbei ist es dann gleichbedeutend, ob eine Kraft drückend oder in gleicher Richtung ziehend wirkt (Bild **2.**1). Würde die Wirkungslinie der Kraft nicht durch den Schwerpunkt des Körpers gehen, könnte der Körper in Drehung versetzt werden. Die Bestimmung von Schwerpunkten wird in Abschnitt 3 dargestellt.

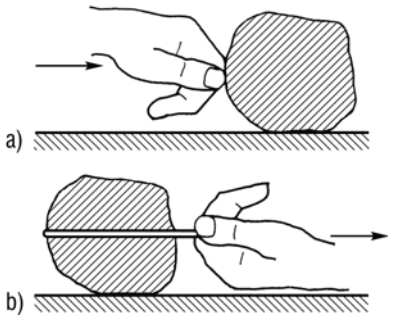

Bild **2.**1
Ein Stein liegt auf einer Unterlage.
Auf den Stein wirkt eine Kraft, sie will ihn verschieben
a) die Kraft wirkt drückend
b) die Kraft wirkt ziehend
Die Auswirkung auf den Stein ist die gleiche:
Er wird in Kraftrichtung verschoben

Die Bauwerke und ihre einzelnen Bauteile werden durch Kräfte belastet. Es sind Kräfte, die durch Wind und Schnee entstehen, die aus den Eigenlasten der Baustoffe und aus der Nutzung der Bauwerke herrühren.

Diese Kräfte sollen von den Bauteilen aufgenommen und auf die darunter angeordneten Bauteile übertragen werden. Alle Kräfte müssen vom Baugrund aufgenommen werden. Die Bauteile dürfen sich unter Krafteinwirkung nicht verschieben, die Bauteile sollen sich nicht zu stark verformen, das ganze Bauwerk muss standsicher sein.

Die an einem Körper wirkenden Kräfte können nach bestimmten Regeln zu einer einzigen Ersatzkraft zusammengefasst werden, ohne die Gesamtwirkung der Kräfte zu verändern. Umgekehrt kann man eine Kraft in mehrere Teilkräfte mit der gleichen Gesamtwirkung zerlegen.

2.1 Zusammensetzen von Kräften

Das Zusammensetzen und die Gesamtwirkung von Kräften soll nachfolgend an zwei Kräften gezeigt werden.

Es wird zunächst angenommen, dass die Wirkungslinien der beiden Kräfte in der dargestellten Ebene liegen (in der Zeichenebene). Die Kräfte greifen also nicht räumlich an. Beide Kräfte können auch auf einer Linie wirken, sie haben dann eine gemeinsame Wirkungslinie.

2.1.1 Kräfte mit gemeinsamer Wirkungslinie

Zwei an einem Körper in gemeinsamer Wirkungslinie angreifende Kräfte können durch einfaches Addieren (Zusammenzählen) zu einer einzigen Kraft zusammengefasst werden. Diese Kraft hat die gleiche Wirkung wie die beiden Einzelkräfte zusammen. Die Wirkung der zusammengefass-

S. Baar, *Lohmeyer Baustatik 1,* DOI 10.1007/978-3-8348-2221-5_2,
© Springer Fachmedien Wiesbaden 2016

ten Kraft entspricht dem Resultat (Ergebnis) der Wirkungen beider Einzelkräfte. Diese Kraft heißt resultierende Kraft, kurz Resultierende.

Daraus ist für Kräfte an einem starren Körper mit gemeinsamer Wirkungslinie zu folgern:

1. **Kräfte können beliebig auf ihrer Wirkungslinie verschoben werden.**
2. **Bei einer Verschiebung auf der Wirkungslinie ändert sich die Wirkung der Kräfte nicht.**
3. **Zwei Kräfte können durch Addieren zu einer Resultierenden zusammengefasst werden.**
4. **Die Resultierende ist gleich der algebraischen Summe aller Kräfte:**

$$\boldsymbol{R = F_1 + F_2} \tag{2.1}$$

Beispiele zur Erläuterung

1. An einem starren Körper drückt eine Kraft F_1 mit 10 kN, und auf derselben Wirkungslinie zieht eine Kraft F_2 mit 5 kN in der gleichen Richtung an der gegenüberliegenden Seite des Körpers (Bild **2.**2). Die Größe der Resultierenden R beträgt

$$R = F_1 + F_2 \qquad R = 10\ \text{kN} + 5\ \text{kN} = 15\ \text{kN}$$

Es ist für die Bewegungsänderung des Körpers völlig gleichgültig, ob er durch eine Kraft von F_1 = 10 kN gedrückt und gleichzeitig durch eine Kraft F_2 = 5 kN gezogen wird oder ob er insgesamt durch eine Kraft R = 15 kN gezogen oder gedrückt wird.

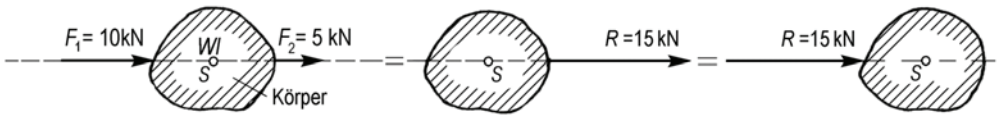

Bild **2.**2 Zwei Kräfte mit gemeinsamer Wirkungslinie *WI* und gleicher Richtung verschieben einen Körper

2. Auf einen Körper drücken zwei Kräfte, die einander entgegengesetzt gerichtet sind. F_1 drückt mit 35 kN nach rechts, F_2 mit 20 kN nach links (Bild **2.**3a).

Die Resultierende wird berechnet.

$$R = F_1 - F_2 = +\,35\ \text{kN} - 20\ \text{kN} = +\,15\ \text{kN}$$

Die Resultierende hat die Größe von 15 kN und wirkt nach rechts.

Der Körper wird bei Wirkung der Kräfte F_1 und F_2 in gleicher Weise bewegt wie bei alleiniger Wirkung der Resultierenden R. Er wird nach rechts verschoben (Bild **2.**3b).

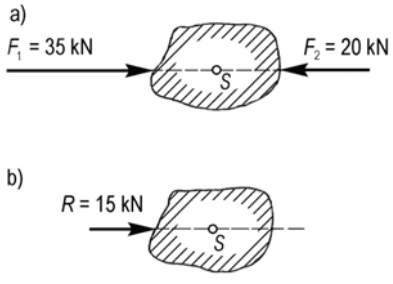

Bild **2.**3 Zwei Kräfte mit gemeinsamer Wirkungslinie *WI* und entgegengesetzter Richtung verschieben einen Körper

2.1.2 Kräfte mit verschiedenen Wirkungslinien

Zwei Kräfte, die an einem Punkt des Körpers mit verschiedenen Wirkungslinien angreifen, können nicht einfach durch Addieren der Beträge zusammengefasst werden. Aber auch hier gibt es eine Resultierende mit der gleichen Wirkung (Bild **2.**4).

Wenn erst die Kraft F_1 einen Körper nach rechts und dann die Kraft F_2 diesen nach unten bewegt, ergibt sich eine Gesamtverschiebung in schräger Richtung (Bild **2.**4), ebenso in umgekehrter Reihenfolge, wenn also erst die Kraft F_2 nach unten und dann die Kraft F_1 nach rechts wirken würde (Bild **2.**4c). Dem Verlauf der resultierenden Bewegung muss aber auch die Richtung der resultierenden Kraft entsprechen.

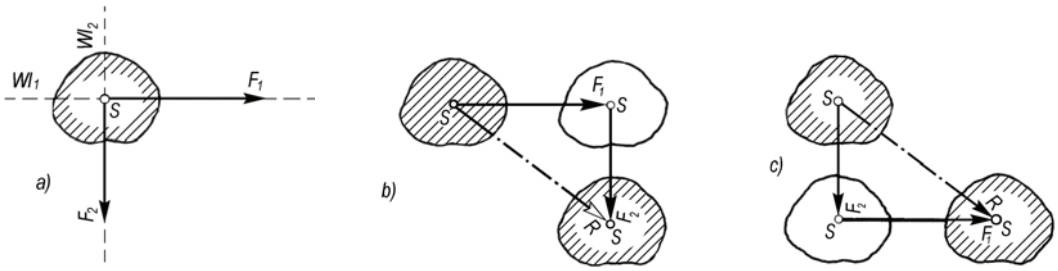

Bild **2.**4 Zwei innere Kräfte mit verschiedenen Wirkungslinien (Wl_1 und Wl_2) verschieben einen Körper

Es ist für die Bewegung eines Körpers gleichgültig, ob er erst durch die eine Kraft und dann durch die andere Kraft bewegt wird oder umgekehrt. Die gleiche Wirkung hat die Resultierende.

Zur Bestimmung der Resultierenden gibt es zwei Möglichkeiten: das zeichnerische oder das rechnerische Verfahren. Es soll zunächst das zeichnerische Verfahren erklärt werden.

2.1.2.1 Zeichnerisches Verfahren (grafische Methode)

Das zeichnerische Verfahren ist sehr anschaulich und trotz des Zeichenaufwandes einfacher als die rechnerische Methode.

Aus Bild **2.**4 ist zu erkennen, dass die Resultierende aus dem zeichnerischen Aneinanderreihen der beiden Kräfte F_1 und F_2 ermittelt werden kann. Ihre Größen, ihre Richtungen und die Neigungen ihrer Wirkungslinien sind dabei zu beachten. Zeichnet man die Kräfte in einem bestimmten Kräftemaßstab, so kann man auch die Resultierende aus der Zeichnung in diesem Maßstab entnehmen. Die Richtung der Resultierenden ergibt sich vom Anfangspunkt A des einen Kraftpfeils zum Endpunkt E des anderen Kraftpfeils. Die Wirkungslinie der Resultierenden ist damit ebenfalls gegeben (Bild **2.**5).

Betrachtet man die beiden Kräftedreiecke (Bild **2.**5b und c), dann stellt man fest, dass die Resultierende in beiden Dreiecken die gleiche ist. Beide Kräftedreiecke lassen sich auch so zusammenschieben, dass sich die Resultierende eines Kräftedreiecks mit der Resultierenden des anderen Kräftedreiecks deckt. Man erhält damit in Bild **2.**5c ein Rechteck, da die beiden Kräfte F_1 und F_2 hier rechtwinklig zueinander wirken. Wenn der Winkel zwischen ihren Wirkungslinien beliebig groß ist, entsteht beim Zusammenschieben der Kräftedreiecke ein Parallelogramm, das sog. Kräfteparallelogramm. Gleichbenannte Kräfte verlaufen parallel zueinander. Die Resultierende R ist die Diagonale des Parallelogramms vom Anfangspunkt A des einen Kraftpfeils zum Endpunkt E des anderen Kraftpfeils (Bild **2.**5).

Zusammenfassung

Beim zeichnerischen Verfahren wird von der Lage der Kräfte ausgegangen. Im Lageplan wird die Lage der Kräfte dargestellt. Zur Bestimmung der Resultierenden werden die Kräfte in Kraftdreiecken maßstäblich dargestellt und aneinandergereiht. Daraus entsteht der Kräfteplan.

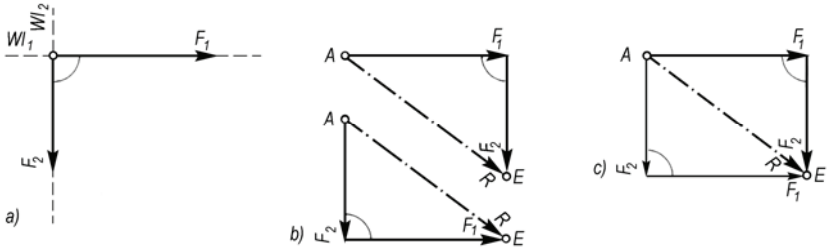

Bild **2.**5 Zwei Kräfte werden ersetzt durch eine Resultierende
a) Lageplan, b) Kräftedreiecke, c) Kräfteplan

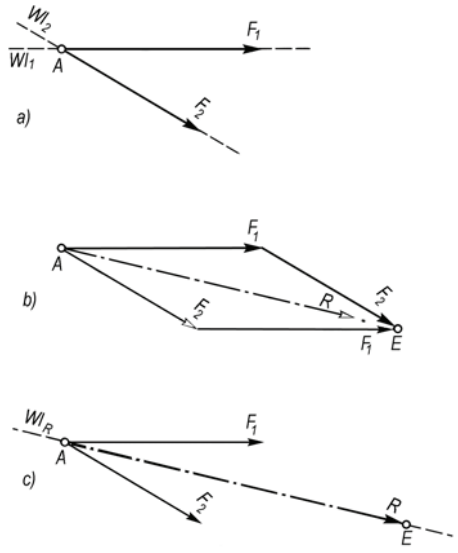

Bild **2.**6 Das Parallelogramm der Kräfte
a) Lageplan mit zwei angreifenden Kräfte
b) Kräfteplan als Kräfteparallelogramm
c) Lageplan mit der Resultierenden, die die angreifenden Kräfte ersetzt

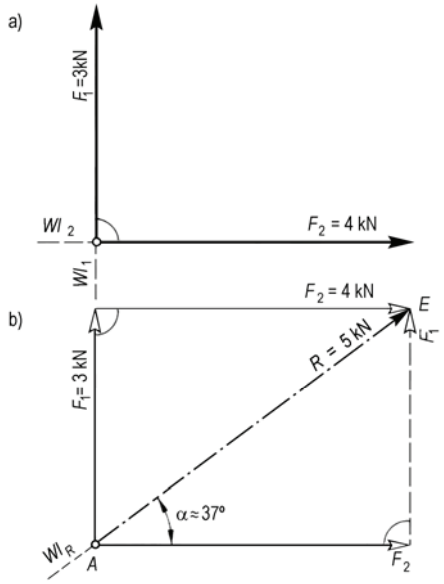

Bild **2.**7 Zwei Kräfte mit verschiedenen Wirkungslinien (Wl_1 und Wl_2)
a) Lageplan: Beide Kräfte ziehen an einem Punkt
b) Kräfteplan: Die Kräfte werden hintereinander gereiht; entweder $F_1 \cdots F_2$ oder $F_2 \cdots F_1$. Daraus ergibt sich die Resultierende R vom Anfangspunkt A zum Endpunkt E in Größe und Richtung

Beispiel zur Erläuterung

1. An einem Punkt ziehen zwei Kräfte im rechten Winkel zueinander:

$F_1 = 3$ kN, $F_2 = 4$ kN

Die Resultierende ergibt sich aus Bild **2.**7 mit $R = 5$ kN. Der Winkel α beträgt etwa 37° zur Waagerechten.

Hinweis: Bei einem rechtwinkligen Dreieck mit den Seitenlängen im Verhältnis 3 : 4 ergibt sich die Länge der Hypotenuse mit 5, entsprechend dem Lehrsatz des Pythagoras:

$a^2 + b^2 = c^2$

In gleicher Weise ergibt sich bei rechtwinklig wirkenden Kräften im Verhältnis 3 : 4 die resultierende Kraft R mit dem Verhältniswert 5. Daher:

$F_1 = 3$ kN, $F_2 = 4$ kN, $R = 5$ kN

oder

$F_1 = 6$ kN, $F_2 = 8$ kN, $R = 10$ kN

Der Winkel α ergibt sich rechnerisch mit Hilfe der Winkelfunktionen aus:

$\tan \alpha = 3 : 4 = 0{,}75$

$\alpha = 36{,}87° \approx 37°$

Beispiele zur Übung

1. **Zwei Kräfte** $F_1 = 100$ kN und $F_2 = 200$ kN greifen rechtwinklig zueinander an einem Punkt an (Bild **2.**8).

a) Wie groß ist die Resultierende?

b) Wie groß ist der Winkel α zwischen der Resultierenden und der Kraft F_2 ?

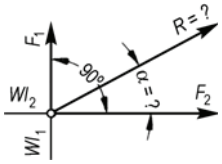

Bild **2.**8
Zwei Kräfte an einem Punkt

2. **Der Eckpfosten** eines Zaunes wird durch die Spanndrähte belastet mit $F = 2$ kN in einem rechten Winkel (Bild **2.**9).

a) Wie groß ist die Resultierende, die von der Verankerung aufzunehmen ist?

b) Wie groß ist der Winkel zu den beiden Kräften?

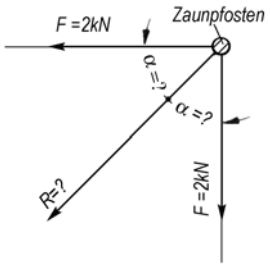

Bild **2.**9
Zwei Spanndrähte ziehen an einem Zaunpfosten

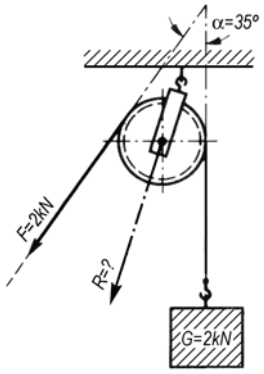

Bild **2.**10
Zugkräfte an einer Seilrolle

3. **Das Seil** einer Baumwinde wird über eine reibungsfreie Rolle geführt. Der Winkel zwischen beiden Seilteilen beträgt 35°. Der hochzuziehende Körper hat eine Eigenlast von $G = 2$ kN (Bild **2.**10).

a) Wie groß ist die resultierende Kraft, die von der Halterung aufzunehmen ist?

b) Wie groß ist der Winkel zwischen der Resultierenden und den Seilteilen?

4. **Ein Wagen** wird von zwei Bauarbeitern gezogen. Der eine zieht mit einer Kraft von $F_1 = 0{,}3$ kN, der andere Arbeiter mit $F_2 = 0{,}4$ kN. Beide ziehen unter einem Winkel von 15° zur Längsachse des Wagens (Bild **2.**11).

a) Wie groß ist die Resultierende, mit der der Wagen gezogen wird?

b) Wie groß ist der Winkel α der Resultierenden zur Längsachse des Wagens?

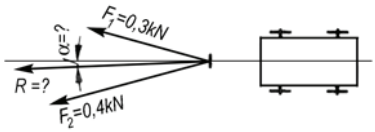

Bild **2.**11 Zugkräfte an einem Wagen

5. **Bei einer Konstruktion** aus Stahl sind zwei Stäbe an einem Blech durch Schrauben angeschlossen (Bild **2.**12). Die Kräfte sind $F_1 = 15$ kN und $F_2 = 20$ kN. Die Winkel zur Lotrechten sind $\alpha_1 = 15°$ und $\alpha_2 = 30°$.

a) Wie groß ist die Resultierende?

b) Wie groß ist der Winkel α_R der Resultierenden zur Lotrechten?

6. **Eine freistehende Gartenmauer** hat auf 1 m Mauerlänge in der Mitte der Wandhöhe eine zusammengefasste waagerechte Winddruckkraft von $W = 1{,}2$ kN aufzunehmen (Bild **2.**13). Die Eigenlast der Mauer beträgt je Meter $G = 8{,}65$ kN und wirkt zusammengefasst in der Mitte der 24 cm dicken Mauer. Mauerhöhe $h = 2{,}00$ m.

a) Wie groß ist die Resultierende?

b) Wie groß ist der Winkel der Resultierenden zur Lotrechten?

c) Wo durchstößt die Resultierende die Fuge zwischen Mauerwerk und Fundament? Wie groß ist der Abstand c des Durchstoßpunktes von der Kante K?

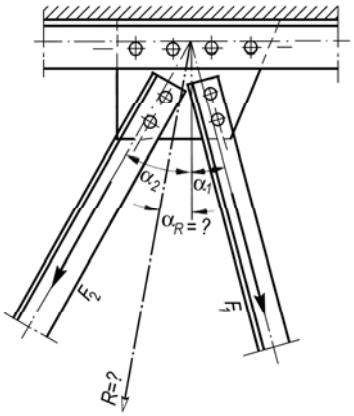

Bild **2.**12
Zwei Zugkräfte an dem Knotenpunkt eines Dachbinders

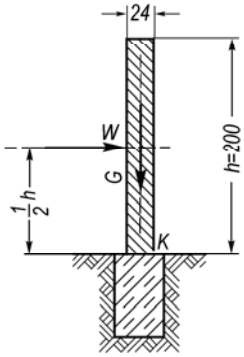

Bild **2.**13
Winddruck bei einer Gartenmauer

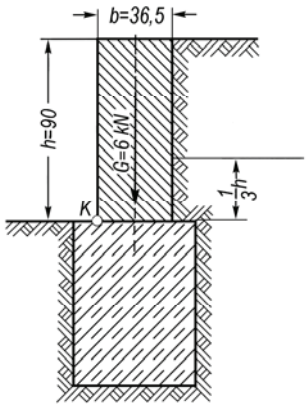

Bild **2.**14
Erddruck bei einer kleinen Stützmauer

7. Eine Stützmauer hat auf 1,00 m Länge eine Eigenlast von G = 6 kN (Bild **2.**14). Die Druckkraft aus dem Erdreich beträgt E = 2,5 kN und greift unter einem Winkel δ = 20° in einem Drittel der Wandhöhe an. Wandhöhe h = 90 cm, Wandbreite b = 36,5 cm.

a) Wie groß ist die Resultierende?

b) Wie groß ist der Winkel α der Resultierenden zur Lotrechten?

c) Wie groß ist der Abstand der Resultierenden von der Kante K?

2.1.2.2 Rechnerisches Verfahren (analytische Methode)

Für den Sonderfall, dass zwei Kräfte rechtwinklig zueinander wirken, ist die rechnerische Lösung mit Hilfe des Lehrsatzes von Pythagoras und mit Winkelfunktionen durchführbar.

Kraftangriff in rechtem Winkel

Beide Kräfte bilden ein rechtwinkliges Kräftedreieck. Die Resultierende R ist darin die Hypotenuse des Dreiecks (Bild **2.**15).

Die Größe der Resultierenden kann mit Gleichung (**2.**2) berechnet werden, die sich aus dem Lehrsatz des Pythagoras für das rechtwinklige Dreieck ergibt (Bild **2.**16):

$$a^2 + b^2 = c^2$$

$$R^2 = F_1^2 + F_2^2 \qquad R = \sqrt{F_1^2 + F_2^2} \tag{2.2}$$

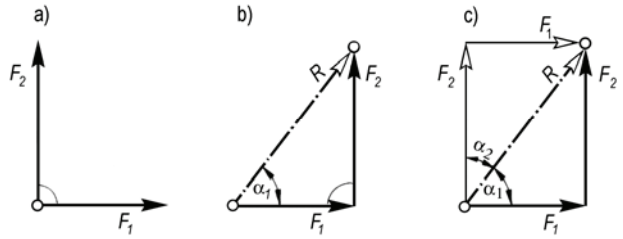

Bild **2.**15 Zwei Kräfte sind durch eine Resultierende zu ersetzen
a) Lageplan: Beide Kräfte greifen an einem Punkt an und stehen rechtwinklig zueinander
b) Kräfteplan: Beide Kräfte bilden ein rechtwinkliges Kräftedreieck
c) Kräfteplan als Kräfteparallelogramm

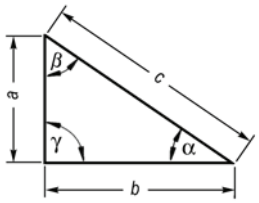

Bild **2.**16 Rechtwinkliges Dreieck mit den Seiten a, b und c

Die Richtung der Resultierenden kann mit den Winkelfunktionen berechnet werden. Die Resultierende verläuft vom Anfangspunkt der ersten Kraft zum Endpunkt der anderen Kraft. Der Winkel der Resultierenden zur waagerechten Kraft F_1 wird mit α_1 bezeichnet und der Winkel zur Kraft F_2 mit α_2 (Bild **2.**15):

$$\tan \alpha_1 = \frac{F_2}{F_1} \qquad \tan \alpha_2 = \frac{F_1}{F_2} \tag{2.3) (2.4}$$

Beide Winkel ergeben zusammen einen rechten Winkel

$$\alpha_1 + \alpha_2 = 90° \tag{2.5}$$

Die Lage der Resultierenden ist das dritte Bestimmungsstück. Die Wirkungslinie der Resultierenden geht durch den Schnittpunkt der beiden Kräfte. Damit ist die Lage der Resultierenden bekannt.

Beispiel zur Erläuterung

Zwei Kräfte $F_1 = 300$ kN und $F_2 = 400$ kN greifen rechtwinklig zueinander an einem Punkt an (Bild **2.**17).

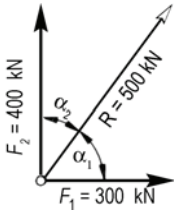

Bild **2.**17 Zwei Kräfte greifen an einem Punkt rechtwinklig zueinander an mit $F_1 = 300$ kN und $F_2 = 400$ kN

Größe der Resultierenden:

$$R = \sqrt{F_1^2 + F_2^2}$$

$$R = \sqrt{(300\,\text{kN})^2 + (400\,\text{kN})^2}$$

$$R = 500\ \text{kN}$$

Winkel zur Waagerechten:

$$\tan \alpha_1 = \frac{F_2}{F_1} = \frac{400\ \text{kN}}{300\ \text{kN}} = 1{,}333 \qquad \alpha_1 = 53°$$

Winkel zur Senkrechten:

$$\tan \alpha_2 = \frac{F_1}{F_2} = \frac{300\ \text{kN}}{400\ \text{kN}} = 0{,}75 \qquad \alpha_2 = 37°$$

Kontrolle:

$$\alpha = \alpha_1 + \alpha_2 = 53° + 37° = 90°$$

Kraftangriff in spitzem oder stumpfem Winkel

Beide Kräfte bilden ein schiefwinkliges Kräftedreieck.

Die Resultierende R kann mit dem Kosinussatz entsprechend Bild **2.**18 berechnet werden.

Er lautet: $c^2 = a^2 + b^2 - 2\,ab \cdot \cos \gamma$

Umgeformt für die Resultierende im Kräftedreieck erhält man:

$$\boldsymbol{R = \sqrt{F_1^2 + F_2^2 - 2 \cdot F_1 \cdot F_2 \cdot \cos \gamma}} \tag{2.6}$$

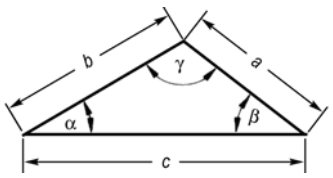

Bild **2.**18 Schiefwinkliges Dreieck mit den Seiten *a, b* und *c* sowie den zugeordneten Winkeln α, β und γ

Die Winkel der Resultierenden zwischen den Kräften sind mit dem Sinussatz zu bestimmen. Er lautet entsprechend Bild **2.**18:

$$a : b : c = \sin \alpha : \sin \beta : \sin \gamma \tag{2.7}$$

Daraus erhält man mit den Kräften des Kräftedreiecks:

$$F_1 : F_2 : R = \sin \alpha : \sin \beta : \sin \gamma$$

Die fehlenden Winkel α (gegenüber F_1) und β (gegenüber F_2) können berechnet werden:

$$\sin \alpha = \sin \gamma \cdot \frac{F_1}{R} \tag{2.8}$$

$$\sin \beta = \sin \gamma \cdot \frac{F_2}{R} \tag{2.9}$$

Beispiel zur Erläuterung

An einem Knotenpunkt einer Stahlkonstruktion entsprechend Bild **2.**12 greifen die Kräfte F_1 = 15 kN und F_2 = 20 kN an. Das Kräftedreieck ist in Bild **2.1**9 dargestellt.

Daraus ergibt sich der Winkel

$$\gamma = 180° - \alpha_1 - \alpha_2$$

$$\gamma = 180° - 15° - 30° = 135°$$

$$\cos \gamma = \cos (180° - 15°) = - \cos 45° = - 0{,}707$$

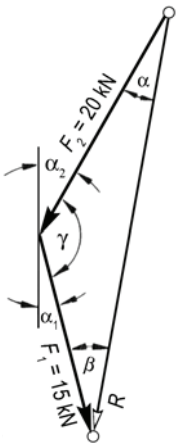

Bild **2.**19
Schiefwinkliges Kräftedreieck für die Kräfte am Knotenpunkt einer Stahlkonstruktion nach Bild **2.**12

Die Resultierende wird berechnet:

$$R = \sqrt{F_1^2 + F_2^2 - 2F_1 \cdot F_2 \cdot \cos\gamma}$$

$$R = \sqrt{15^2 + 20^2 - 2 \cdot 15 \cdot 20 \cdot (-0{,}707)}$$

$$R = \sqrt{225 + 400 + 424}$$

Die Winkel werden berechnet:

$$\sin\alpha = \sin\gamma \cdot \frac{F_1}{R}$$

$$\sin\alpha = 0{,}707 \cdot \frac{15\ \text{kN}}{32{,}4\ \text{kN}}$$

$$\sin\alpha = 0{,}327 \qquad \alpha = 19{,}1°$$

$$\sin\beta = \sin\gamma \cdot \frac{F_2}{R}$$

$$\sin\beta = 0{,}707 \cdot \frac{20\ \text{kN}}{32{,}4\ \text{kN}}$$

$$\sin\beta = 0{,}436 \qquad \beta = 25{,}9°$$

$$\alpha + \beta + \gamma = 19{,}1° + 25{,}9° + 135° = 180°$$

$$\alpha_R = \beta - \alpha_1 = 25{,}9° - 15°$$

$$\alpha_R = 10{,}9°$$

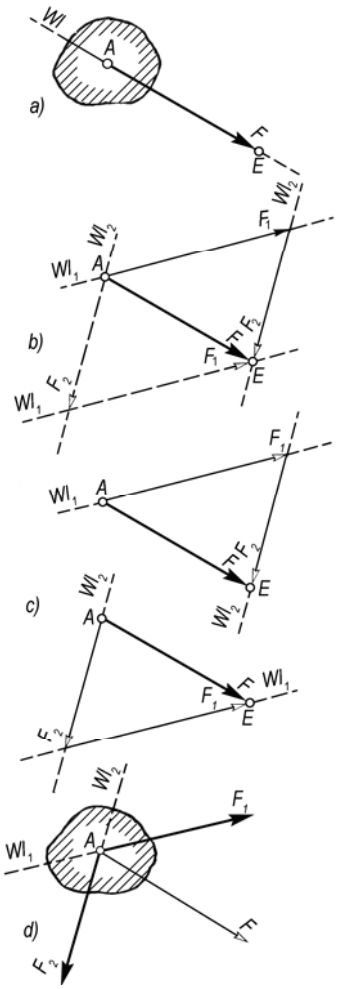

Bild **2.**20
Eine Kraft wird zerlegt in zwei Komponenten
a) Lageplan mit der angreifenden Kraft am Körper
b) Kräfteparallelogramm (Kräfteplan)
c) die beiden Kräftedreiecke
d) Lageplan mit den Komponenten der Kraft

2.2 Zerlegen von Kräften

Kräfte, die an einem Körper angreifen, können für weitere Berechnungen in zwei (oder mehrere) Teilkräfte beliebig zerlegt werden. Diese Teilkräfte werden als Komponenten bezeichnet (Komponente = Bestandteil eines Ganzen). Sie sind die Ersatzkräfte für die ursprüngliche Kraft und haben zusammen die gleiche Wirkung wie diese.

Das Zerlegen von Kräften kann zeichnerisch oder rechnerisch erfolgen.

2.2.1 Zeichnerisches Verfahren

Die Größe einer Kraft ist durch die Länge des Kraftpfeils bekannt, gekennzeichnet durch Anfangspunkt *A* und Endpunkt *E*. Wenn eine Kraft zerlegt werden soll, sind auch die Anfangs- und Endpunkte ihrer Komponenten bekannt: Es sind dieselben Punkte. Für die Zerlegung der Kraft