1 Arithmetik reeller Zahlen

In der Menge der reellen Zahlen sind die Addition und die Multiplikation zwei Rechenoperationen, die durch festgelegte Eigenschaften erklärt sind. Daraus ergeben sich verschiedene Schlussfolgerungen für das Rechnen mit reellen Zahlen. Außerdem gibt es in der Menge der reellen Zahlen einen Ordnungsbegriff, der z. B. dem Lösen von Ungleichungen zugrunde liegt.

Bezeichnungen
Die Menge der reellen Zahlen wird mit $\mathbb{R}$ bezeichnet. Die Zugehörigkeit einer Zahl a zur Menge $\mathbb{R}$ wird mit $a \in \mathbb{R}$ gekennzeichnet.

1.1 Die Addition

In diesem Abschnitt werden die vier Axiome der Addition angegeben. Die Subtraktion wird mithilfe der Addition erklärt. Rechenregeln für die Addition und die Subtraktion werden genannt

Definition 1.1

Zu zwei beliebigen reellen Zahlen a und b gibt es eine reelle Zahl $a+b$, die **Summe** von a und b genannt wird. Die Zahlen a und b heißen **Summanden**.

Axiome der Addition

Für beliebige Zahlen $a, b, c \in \mathbb{R}$ gelten folgende Axiome (Festlegungen):

1. $a + b = b + a$. — **Kommutativgesetz**
2. $(a + b) + c = a + (b + c)$. — **Assoziativgesetz**
3. Es gibt eine reelle Zahl 0 so, dass für alle $a \in \mathbb{R}$ gilt: — **Neutrales Element**
   $a + 0 = 0 + a = a$.
   Diese Zahl wird **Null** genannt.
4. Zu jeder Zahl $a \in \mathbb{R}$ gibt es eine Zahl $b \in \mathbb{R}$ so, dass gilt: — **Inverses Element**
   $a + b = b + a = 0$.
   Die Zahl b wird die zu a **entgegengesetzte Zahl** genannt.

Bemerkung 1.2

Eine Menge mit einer Operation, die diese vier Eigenschaften Kommutativität, Assoziativität, Existenz des neutralen Elementes und des zu einem beliebigen Element inversen erfüllt, wird in der Mathematik nach dem Mathematiker **Abel** kommutative oder **Abel-Gruppe** genannt. So besitzt die Menge der reellen Zahlen $\mathbb{R}$ bezüglich der Addition die algebraische Struktur einer kommutativen Gruppe. Das neutrale Element ist die Zahl 0 (Axiom 3), und das zu einem Element inverse ist die entgegengesetzte Zahl (Axiom 4).

Niels Henrik Abel (* 5. August 1802 in der Nähe von Stavanger, † 6. April 1829 in Froland, Norwegen)
norwegischer Mathematiker
hier: Abel-Gruppen

Aus den vier Axiomen ergeben sich einige Folgerungen, die für das Rechnen mit reellen Zahlen von Bedeutung sind:

Differenz

1. Zu zwei Zahlen $a, b \in \mathbb{R}$ gibt es genau eine Zahl $x \in \mathbb{R}$, für die gilt
   $a + x = b$.
   x heißt **Differenz von** b **und** a. Man schreibt
   $x = b - a$
   und sagt: „a wird von b **subtrahiert**".
   Für $0 - a$ wird kurz $-a$ geschrieben (siehe Axiom 3).

Entgegengesetzte Zahl

2. Für jede Zahl $a \in \mathbb{R}$ gilt $a = -(-a)$, d. h., die zu $-a$ entgegengesetzte Zahl ist a. Insbesondere ist die zu 0 entgegengesetzte Zahl 0: $-0 = 0$.

3. Für beliebige Zahlen $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ gilt

Gleichheit von Differenzen
Summe von Differenzen
Differenz von Differenzen

$$\begin{array}{ccc} b - a = d - c & \text{genau dann, wenn} & b + c = a + d\ , \\ (b-a) + (d-c) & = & (b+d) - (a+c), \\ (b-a) - (d-c) & = & (b+c) - (a+d). \end{array}$$

Kopfrechnen

Beispiel 1.3

Die Axiome der Addition und ihre Folgerungen werden z. B. beim „Kopfrechnen" angewendet. So ist

$$\begin{array}{lcl} 23 + 56 & = & (20+3) + (50+6) = (20+50) + (3+6) = 79, \\ 68 + (45+32) & = & 68 + (32+45) = (68+32) + 45 = 145, \\ (145-56) + (37-44) & = & (145+37) - (56+44) = 182 - 100 = 82. \end{array}$$

1.2 Die Multiplikation

In diesem Abschnitt werden die vier Axiome der Multiplikation angegeben. Die Division wird mithilfe der Multiplikation erklärt. Rechenregeln für die Multiplikation und die Division werden genannt.

Definition 1.4

Zu zwei beliebigen reellen Zahlen a und b gibt es stets eine reelle Zahl $a \cdot b$, die **Produkt von** a **und** b genannt wird. Die Zahlen a und b heißen **Faktoren**.

Axiome der Multiplikation

Für beliebige Zahlen $a, b, c \in \mathbb{R}$ gelten folgende Axiome (Festlegungen):

Kommutativgesetz

1. $a \cdot b = b \cdot a$.

Assoziativgesetz

2. $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$.

Neutrales Element

3. Es gibt eine reelle Zahl 1 so, dass für alle $a \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$ gilt: $a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$.
   Diese Zahl wird **Eins** genannt.

Inverses Element

4. Zu jeder Zahl $a \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$ gibt es eine Zahl $b \in \mathbb{R}$ so, dass gilt: $a \cdot b = b \cdot a = 1$.
   Die Zahl b wird die zu a **reziproke Zahl** genannt.

Bemerkung 1.5

Die Menge der von null verschiedenen reellen Zahlen $\mathbb{R}\backslash\{0\}$ hat bezüglich der Multiplikation ebenfalls die algebraische Struktur einer kommutativen Gruppe. Das neutrale Element ist hierbei die Zahl 1 (Axiom 3), und das zu einem Element inverse ist die reziproke Zahl (Axiom 4).

Zwischen Addition und Multiplikation gibt es ein Verknüpfungsgesetz. Für beliebige Zahlen $a, b, c \in \mathbb{R}$ gilt

Distributivgesetz

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c.$$

Aus den Axiomen der Multiplikation und dem Distributivgesetz ergeben sich einige Folgerungen für das Rechnen mit reellen Zahlen:

Produkt gleich null

1. **Ein Produkt ist genau dann gleich null, wenn mindestens einer seiner Faktoren gleich null ist**, d. h., aus $a \cdot b = 0$ folgt $a = 0$ oder $b = 0$ und umgekehrt.

Quotient, Bruch

2. Zu zwei Zahlen $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a \neq 0$ gibt es genau eine Zahl $x \in \mathbb{R}$, für die gilt $a \cdot x = b$.
   x heißt **Quotient aus** b **und** a oder **Bruch** mit dem **Zähler** b und dem **Nenner** a. Man schreibt
   $$x \;=\; b : a \;=\; \frac{b}{a} \;=\; b/a$$
   und sagt: „b wird durch a **dividiert**“.

Reziproke Zahl

3. Für jede Zahl $a \in \mathbb{R}, a \neq 0$ ist die zu a reziproke Zahl $1/a$. Insbesondere ist die zu 1 reziproke Zahl 1. Die zu $1/a$ reziproke Zahl ist a, sodass gilt
   $$\frac{1}{1/a} \;=\; a.$$

Gleichheit von Brüchen

4. Für beliebige Zahlen $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ mit $a, c \neq 0$ ist
   $$\frac{b}{a} = \frac{d}{c} \quad \text{genau dann, wenn} \quad b \cdot c \;=\; a \cdot d,$$
   d. h., **zwei Brüche sind genau dann gleich**, wenn die Produkte aus Zähler des einen und Nenner des anderen Bruches gleich sind.

Produkt von Brüchen

5. Für beliebige Zahlen $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ ist
   $$\frac{b}{a} \cdot \frac{d}{c} \;=\; \frac{b \cdot d}{a \cdot c}, \; a, c \neq 0 \quad \text{und} \quad \frac{b}{a} : \frac{d}{c} \;=\; \frac{b \cdot c}{a \cdot d}, \; a, c, d \neq 0,$$
   Quotient von Brüchen
   d. h., **das Produkt zweier Brüche** ist ein Bruch, dessen Zähler das Produkt der Zähler der Faktoren und dessen Nenner das Produkt der Nenner der Faktoren ist, und **zwei Brüche werden dividiert**, indem der erste Bruch mit dem Reziproken des zweiten Bruches multipliziert wird.

6. Für jede Zahl $a \in \mathbb{R}$ gilt $-a = (-1) \cdot a$, d. h., die zu a entgegengesetzte Zahl $-a$ ist das Produkt der Zahlen -1 und a.

7. Für beliebige Zahlen $a, b \in \mathbb{R}$ gilt $-(a \cdot b) = (-a) \cdot b$, d. h., die zum Produkt $a \cdot b$ entgegengesetzte Zahl $-(a \cdot b)$ ist das Produkt der zu a entgegengesetzten Zahl $-a$ und der Zahl b.

8. Es gilt $(-1) \cdot (-1) = 1$, d. h., das Produkt der zu 1 entgegengesetzten Zahl -1 mit sich selbst ergibt wieder 1.

Bemerkung 1.6 Die Menge $\mathbb{R}$ der reellen Zahlen mit den in **Definition 1.1** und **Definition 1.4** erklärten Rechenoperationen Addition und Multiplikation hat mit den jeweils vier Axiomen und dem Verknüpfungsgesetz (Distributivgesetz) die algebraische Struktur eines **Körpers**.

Malzeichen Sind ein oder beide Faktoren eines Produktes Variablen, so kann beim Schreiben des Produktes das Malzeichen weggelassen werden. Z. B. wird geschrieben

$$a \cdot b = ab, \qquad 8 \cdot b = 8b.$$

Fakultät Das Produkt der ersten n natürlichen Zahlen wird kürzer geschrieben

$$1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n = n!\ .$$

Es heißt **Fakultät** von n. Vereinbarungsgemäß ist außerdem

$$0! = 1.$$

1.3 Anwendungen der Rechenoperationen

Die Rechenoperationen werden beim Umformen und Auswerten von Termen angewendet. Dabei haben Klammern Vorrang vor den „Punktrechenarten“ Multiplikation und Division und diese wiederum vor den „Strichrechenarten“ Addition und Subtraktion. Das Erweitern und Kürzen von Brüchen wird bei ihrer Addition und Subtraktion bzw. bei ihrer Vereinfachung benutzt. Das ganzzahlige Potenzieren einer reellen Zahl wird mit der Multiplikation erklärt. Der binomische Lehrsatz zum Potenzieren von Summen mit zwei Summanden wird angegeben.

Das Auflösen von Klammern

Steht ein Pluszeichen vor einem Summanden in Klammern, so bleibt die Klammer einfach weg. Steht ein Minuszeichen vor einem Summanden in Klammern, so sind beim Weglassen der Klammer alle in ihr vorkommenden Vorzeichen bzw. Rechenzeichen umzukehren.

Beim Auftreten von Mehrfachklammern können z. B. die Klammern von innen nach außen aufgelöst werden.

Beispiel 1.7

Auflösen von Klammern

Es ist

$$\begin{aligned}
&8p - (15r - 7q + 6p) + (8q - p + 7r)\\
&\quad = \quad 8p - 15r + 7q - 6p + 8q - p + 7r\\
&\quad = \quad p + 15q - 8r,\\
&17m + (6n - (3m + 4n)) - ((8m - n) - (5m + (3n - 6m)))\\
&\quad = \quad 17m + (6n - 3m - 4n) - (8m - n - (5m + 3n - 6m))\\
&\quad = \quad 17m + (2n - 3m) - (8m - n - (-m + 3n))\\
&\quad = \quad 17m + 2n - 3m - (8m - n + m - 3n)\\
&\quad = \quad 14m + 2n - (9m - 4n)\\
&\quad = \quad 14m + 2n - 9m + 4n \;=\; 5m + 6n.
\end{aligned}$$

Das Ausmultiplizieren und das Ausklammern

Das Ausmultiplizieren von Klammern erfolgt nach dem Distributivgesetz. So ist z. B.

$$\begin{aligned}
(a+b)c &= ac + bc, & a(b-c) &= ab - ac,\\
(a+b)(c+d) &= a(c+d) + b(c+d) &&= ac + ad + bc + bd.
\end{aligned}$$

Umgekehrt gelesen, ergeben sich daraus Regeln zum Ausklammern von gleichen Faktoren in Summanden:

$$\begin{aligned}
ac + bc &= (a+b)c, & ab + ac &= a(b+c),\\
ac - bc &= (a-b)c, & ab - ac &= a(b-c).
\end{aligned}$$

Beispiel 1.8

Ausmultiplizieren, Ausklammern

Im ersten Beispiel wird zuerst jeder Summand der ersten Klammer mit der zweiten Klammer multipliziert und danach diese ausmultipliziert. Im zweiten Beispiel wird der Faktor $x - y$ ausgeklammert.

$$\begin{aligned}
(a + 4b - 7c)(x - y) &= a(x-y) + 4b(x-y) - 7c(x-y)\\
&= ax - ay + 4bx - 4by - 7cx + 7cy,\\
n(x-y) - x + y &= n(x-y) - (x-y) \;=\; (n-1)(x-y).
\end{aligned}$$

Addition und Subtraktion von Brüchen

Erweitern und Kürzen

Das **Erweitern** eines Bruches ist das Multiplizieren seines Zählers und Nenners mit *derselben* Zahl, das **Kürzen** entsprechend das Dividieren durch *dieselbe* Zahl. Erweitern und Kürzen verändern den Wert eines Bruches nicht:

$$\frac{a}{c} = \frac{ad}{cd}, \qquad \frac{ad}{cd} = \frac{a}{c}.$$

Gleichnamige Brüche

Gleichnamige Brüche (d. h., Brüche, deren Nenner gleich sind,) werden addiert bzw. subtrahiert, indem ihre Zähler addiert bzw. subtrahiert werden und der Nenner beibehalten wird:

$$\frac{a}{c} \pm \frac{b}{c} = \frac{a \pm b}{c}.$$

Ungleichnamige Brüche

Ungleichnamige Brüche werden addiert bzw. subtrahiert, indem sie durch Erweitern gleichnamig gemacht und dann addiert bzw. subtrahiert werden:

$$\frac{a}{b} \pm \frac{c}{d} = \frac{ad}{bd} \pm \frac{bc}{bd} = \frac{ad \pm bc}{bd}.$$

Hauptnenner

Beispiel 1.9

Der Hauptnenner der zu subtrahierenden Brüche ist $(x-1)(x-2)$. Der erste Bruch wird mit $(x-2)$, der zweite mit $(x-1)$ erweitert:

$$\frac{4}{x-1} - \frac{3}{x-2} = \frac{4(x-2)-3(x-1)}{(x-1)(x-2)} = \frac{x-5}{(x-1)(x-2)}.$$

Das Potenzieren

Die **n-ten Potenz einer reellen Zahl** a ist das Produkt aus n Faktoren, die alle gleich a sind:

$$a^n = a \cdot a \cdot \ldots \cdot a, \qquad n \in \mathbb{N}.$$

Dabei wird die reelle Zahl a **Basis** und die natürliche Zahl n **Exponent** der Potenz a^n genannt.

Insbesondere ist $a^1 = a$.
Vereinbarungsgemäß ist für eine belebige reelle Zahl $a \neq 0$ stets $a^0 = 1$.

Potenzgesetze

Es gelten folgende **Potenzgesetze** für das Multiplizieren und Dividieren von Potenzen:

Potenz von Produkt, Quotient

$$(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n, \quad (a/b)^n = a^n/b^n,$$

Produkt, Quotient von Potenzen

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}, \quad a^m/a^n = a^{m-n},$$

Potenz, negativer Exponent

$$a^{-n} = 1/a^n = (1/a)^n,$$

Potenz einer Potenz

$$(a^m)^n = (a^n)^m = a^{mn}.$$

Zusammenfassen von Potenzen

Beispiel 1.10

Potenzen werden nach gleichen Basen zusammengefasst:

$$\begin{aligned}
(xy)^{m+n}(yz)^{2m-n}(xz)^{m-2n} &= x^{m+n}y^{m+n}y^{2m-n}z^{2m-n}x^{m-2n}z^{m-2n} \\
&= x^{m+n+m-2n}y^{m+n+2m-n}z^{2m-n+m-2n} \\
&= x^{2m-n}y^{3m}z^{3m-3n}, \\
\frac{a^{1-m}}{a^{n+1}} &= a^{(1-m)-(n+1)} = a^{-(m+n)} = \frac{1}{a^{m+n}}.
\end{aligned}$$

Die binomischen Formeln und der binomische Lehrsatz

Die binomischen Formeln ergeben sich, wenn folgende Klammern nach dem Distributivgesetz ausmultipliziert werden:

$$\begin{aligned}(a+b)^2 &= a^2+2ab+b^2,\\ (a-b)^2 &= a^2-2ab+b^2,\\ (a+b)(a-b) &= a^2-b^2.\end{aligned}$$

1. Binomische Formel
2. Binomische Formel
3. Binomische Formel

Bei steigenden Potenzen ergibt sich durch fortgesetztes Ausmultiplizieren der Klammern

$$\begin{aligned}(a+b)^3 &= a^3+3a^2b+3ab^2+b^3,\\ (a+b)^4 &= a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4,\\ (a+b)^5 &= a^5+5a^4b+10a^3b^2+10a^2b^3+5ab^4+b^5 \text{ usw.}\end{aligned}$$

Für die n-te Potenz der Summe $a+b$ gilt der **binomische Lehrsatz** als Regel zum Ausmultiplizieren:

$$\begin{aligned}(a+b)^n &= \binom{n}{0}a^nb^0+\binom{n}{1}a^{n-1}b^1+\binom{n}{2}a^{n-2}b^2+\dots\\ &\quad+\binom{n}{n-1}a^1b^{n-1}+\binom{n}{n}a^0b^n\\ &= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^{n-k}b^k.\end{aligned}$$

Binomischer Lehrsatz

Dabei sind die Ausdrücke $\binom{n}{k}$ die **Binomialkoeffizienten**. Für ihre Berechnung gilt

$$\binom{n}{k}=\frac{n\cdot(n-1)\cdots(n-k+1)}{1\cdot 2\cdots k}=\frac{n!}{k!\,(n-k)!},\qquad \binom{n}{0}=1.$$

Beispiel 1.11

Berechnung von Binomialkoeffizienten

Die Binomialkoeffizienten für die Potenz $(a+b)^5$ berechnen sich z. B. wie folgt:

$$\binom{5}{0}=1,\quad \binom{5}{1}=\frac{5}{1}=5,\quad \binom{5}{2}=\frac{5\cdot 4}{1\cdot 2}=10,\quad \binom{5}{3}=\frac{5\cdot 4\cdot 3}{1\cdot 2\cdot 3}=10$$
$$\binom{5}{4}=\frac{5\cdot 4\cdot 3\cdot 2}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}=5,\qquad \binom{5}{5}=\frac{5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}=1.$$

Folgende **Eigenschaften der Binomialkoeffizienten** lassen sich leicht nachweisen:

$$\binom{n}{n}=1,\quad \binom{n}{k}=\binom{n}{n-k},\quad \binom{n}{k}+\binom{n}{k+1}=\binom{n+1}{k+1}.$$

Eigenschaften der Binomialkoeffizienten

Dreieck von Pascal

Aufgrund dieser Eigenschaften können die Binomialkoeffizienten auch rekursiv aus dem **Dreieck von Pascal** ermittelt werden:

$$
\begin{array}{ccccccccccc}
 & & & & & 1 & & & & & \\
 & & & & 1 & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 2 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & \\
 & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & \\
1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 \\
 & & & & & \dots & & & & &
\end{array}
$$

Dabei stellt jede Zeile die Binomialkoeffizienten der entsprechenden Potenz von $a+b$ dar, angefangen mit der 0-ten. Die Binomialkoeffizienten der Folgezeile ergeben sich aus denen der vorherigen, indem die beiden unmittelbar darüber stehenden addiert werden. Außen werden jeweils Einsen ergänzt.

Binomischer Lehrsatz

Beispiel 1.12

1. Aus dem binomischen Lehrsatz ergibt sich unmittelbar nach Ersetzen von b durch $-b$

$$
\begin{aligned}
(a-b)^n &= \binom{n}{0} a^n - \binom{n}{1} a^{n-1} b + \binom{n}{2} a^{n-2} b^2 - \dots \\
&\quad + (-1)^{n-1} \binom{n}{n-1} a b^{n-1} + (-1)^n \binom{n}{n} b^n \\
&= \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} a^{n-k} b^k .
\end{aligned}
$$

2. Für die Quadrate von Summen mit mehr als zwei Summanden folgt sukzessive

$$
\begin{aligned}
(a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n)^2 &= a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + \dots + a_n^2 \\
&\quad + 2a_1a_2 + 2a_1a_3 + \dots + 2a_1a_n + 2a_2a_3 + \dots + 2a_{n-1}a_n .
\end{aligned}
$$

3. Nach dem binomischen Lehrsatz ergibt sich unmittelbar

$$(1-2z)^4 = 1 - 8z + 24z^2 - 32z^3 + 16z^4 .$$

1.4 Der Wurzelbegriff

Die Wurzel aus einer nicht negativen reellen Zahl wird mithilfe der Multiplikation und des Potenzbegriffes erklärt. Gesetze für das Rechnen mit Wurzeln bzw. Potenzen mit rationalen Exponenten werden angegeben.

Definition 1.13

Die **Quadratwurzel** $a = \sqrt{b}$ aus einer *nicht negativen* reellen Zahl b ist die *nicht negative* reelle Zahl a, die mit sich selbst multipliziert b ergibt: $a^2 = b$.

Quadratwurzel

Beispiel 1.14

Es ist z. B. $\sqrt{9} = 3$, $\sqrt{0.0144} = 0.12$, $\sqrt{0} = 0$.

Definition 1.15

Sei n eine natürliche Zahl. Die **n-te Wurzel** $a = \sqrt[n]{b}$ aus einer *nicht negativen* reellen Zahl b ist die *nicht negative* reelle Zahl a, deren n-te Potenz a^n den Wert b hat: $a^n = b$. Das Ermitteln der Wurzel aus einer reellen Zahl heißt **Radizieren**.

Radizieren

Beispiel 1.16

Es ist z. B. $\sqrt[3]{8} = 2$, $\sqrt[3]{0.125} = 0.5$, $\sqrt[5]{0} = 0$.

Für das Rechnen mit Wurzeln ergeben sich einige Folgerungen:

1. Es gilt $\sqrt[n]{1} = 1$, da $1^n = 1$ ist.
   Es gilt $\sqrt[n]{0} = 0$, da $0^n = 0$ ist.
   Es gilt $\sqrt[1]{b} = b$, da $b^1 = b$ ist.

2. Aus $a^n = b$ folgt dann $a = \sqrt[n]{b}$, wenn a und b *nicht negativ* sind. Radizieren und Potenzieren sind im Bereich *nicht negativer* reeller Zahlen Umkehrungen voneinander.

Quadratwurzel ist nicht negativ

Beispiel 1.17

1. Aus der Gleichung $9 = 3^2$ folgt $\sqrt{9} = 3$.
2. Aus der Gleichung $9 = (-3)^2$ folgt *nicht* $\sqrt{9} = -3$, sondern $\sqrt{9} = |-3| = 3$.

3. Die Gleichung $x^2 = b$ mit der gegebenen *nicht negativen* reellen Zahl b hat die Lösungen $x = \sqrt{b}$ und $x = -\sqrt{b}$. Wird die Quadratwurzel auf beiden Seiten der Gleichung gebildet, so ergibt sich links für $x \geq 0$ die *nicht negative* Zahl x und für $x < 0$ die *nicht negative* Zahl $-x$. Rechts ergibt sich $\sqrt{b}$.

4. Ist n eine *ungerade natürliche Zahl*, so ist die n-te Wurzel aus der *negativen* reellen Zahl b diejenige *negative* Zahl a, für die $a^n = b$ gilt.

Wurzel aus negativer Zahl

Beispiel 1.18

Z. B. gilt $\sqrt[3]{-27} = -3$, $\sqrt[5]{-32} = -2$, $\sqrt[n]{-1} = -1$ für *ungerade* natürliche Zahlen n.

5. Die Gleichung $x^n = b$ mit $b < 0$ hat nur dann eine reelle Lösung x, wenn n ungerade ist. Dann ist $x < 0$.

   Die Gleichung $x^n = b$ mit $b > 0$ hat genau die positive reelle Lösung $x = \sqrt[n]{b}$, wenn n ungerade ist. Wenn n gerade ist, existieren genau zwei Lösungen: $x = \sqrt[n]{b}$ (positiv) und $x = -\sqrt[n]{b}$ (negativ). Die Probe zeigt jeweils, dass die angegebenen Zahlen x auch wirklich Lösung der Ausgangsgleichung sind.

Potenzgleichungen

Beispiel 1.19

1. Die Gleichung $x^5 = -243$ hat die (negative) Lösung $x = \sqrt[5]{-243} = -3$.
2. Die Gleichung $x^5 = 243$ hat die (positive) Lösung $x = \sqrt[5]{243} = 3$.
3. Die Gleichung $x^4 = 81$ hat die (positive) Lösung $x = \sqrt[4]{81} = 3$ und die (negative) Lösung $x = -\sqrt[4]{81} = -3$.

Wurzelgesetze

Für das Rechnen mit Wurzeln und das Radizieren arithmetischer Ausdrücke gibt es folgende **Wurzelgesetze**:

Wurzel aus Produkt

Wurzel aus Quotienten

Wurzel aus Wurzel

Wurzel aus Potenz

Rationale Exponenten

$$
\begin{aligned}
\sqrt[n]{a^n} &= a, \ (\sqrt[n]{a})^n = a, \ \sqrt[n]{a^{mn}} = a^m, \\
\sqrt[n]{ab} &= \sqrt[n]{a}\,\sqrt[n]{b}, \\
\sqrt[n]{a/b} &= \sqrt[n]{a}/\sqrt[n]{b}, \\
\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} &= \sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[mn]{a} = a^{\frac{1}{mn}}, \\
\sqrt[n]{a^m} &= a^{\frac{m}{n}}, \\
a^{\frac{m}{n}} \cdot a^{\frac{p}{q}} &= a^{\frac{m}{n}+\frac{p}{q}}, \quad a^{\frac{m}{n}}/a^{\frac{p}{q}} = a^{\frac{m}{n}-\frac{p}{q}}, \\
(ab)^{\frac{m}{n}} &= a^{\frac{m}{n}} b^{\frac{m}{n}}, \quad (a/b)^{\frac{m}{n}} = a^{\frac{m}{n}}/b^{\frac{m}{n}}.
\end{aligned}
$$

Anwendung der Wurzelgesetze

Beispiel 1.20

Mit den Wurzelgesetzen ergibt sich

1. $\sqrt[x]{b^{2x}} = b^2$,
2. $\sqrt[3]{12x^6y^9} = \sqrt[3]{12}\,\sqrt[3]{(x^2)^3}\,\sqrt[3]{(y^3)^3} = \sqrt[3]{12}x^2y^3$ (Wurzel aus Produkt),
3. $\sqrt{\frac{5}{9}} = \frac{\sqrt{5}}{3}$ (Wurzel aus Quotienten),
4. $\sqrt[4]{\sqrt{256}} = 2$ (Wurzel aus Wurzel),
5. $\sqrt[nx]{a^{mx}} = \sqrt[n]{a^m}$ (Wurzel aus Potenz).

Treten im Nenner von arithmetischen Ausdrücken Wurzeln auf, so können sie durch äquivalente Umformungen beseitigt werden.

Wurzelfreier Nenner

Beispiel 1.21

Es ist $\dfrac{1}{\sqrt{a}-\sqrt{b}} = \dfrac{1\cdot(\sqrt{a}+\sqrt{b})}{(\sqrt{a}-\sqrt{b})(\sqrt{a}+\sqrt{b})} = \dfrac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{a-b}$.

Hier wurde der Bruch mit $\sqrt{a}+\sqrt{b}$ erweitert, sodass der Nenner nach der dritten binomischen Formel dadurch wurzelfrei ist.

1.5 Anordnung reeller Zahlen, Ungleichungen

Mithilfe von vier Axiomen (Festlegungen) wird ermöglicht, dass reelle Zahlen miteinander verglichen werden können. Daraus ergeben sich

Sachwortverzeichnis