

1 Arithmetik reeller Zahlen

In der Menge der reellen Zahlen sind die Addition und die Multiplikation zwei Rechenoperationen, die durch festgelegte Eigenschaften erklärt sind. Daraus ergeben sich verschiedene Schlussfolgerungen für das Rechnen mit reellen Zahlen. Außerdem gibt es in der Menge der reellen Zahlen einen Ordnungsbegriff, der z. B. dem Lösen von Ungleichungen zugrunde liegt.

1.1 Die Addition

In diesem Abschnitt werden die vier Axiome der Addition angegeben. Die Subtraktion wird mithilfe der Addition erklärt. Rechenregeln für die Addition und die Subtraktion werden genannt

Zu zwei beliebigen reellen Zahlen a und b gibt es eine reelle Zahl $a + b$, die **Summe** von a und b genannt wird. Die Zahlen a und b heißen **Summanden**.

Für beliebige Zahlen $a, b, c \in \mathbb{R}$ gelten folgende Axiome (Festlegungen):

1. $a + b = b + a$.
2. $(a + b) + c = a + (b + c)$.
3. Es gibt eine reelle Zahl 0 so, dass für alle $a \in \mathbb{R}$ gilt:
 $a + 0 = 0 + a = a$.
Diese Zahl wird **Null** genannt.
4. Zu jeder Zahl $a \in \mathbb{R}$ gibt es eine Zahl $b \in \mathbb{R}$ so, dass gilt:
 $a + b = b + a = 0$.
Die Zahl b wird die zu a **entgegengesetzte Zahl** genannt.

Eine Menge mit einer Operation, die diese vier Eigenschaften Kommutativität, Assoziativität, Existenz des neutralen Elementes und des zu einem beliebigen Element inversen erfüllt, wird in der Mathematik nach dem Mathematiker **Abel** kommutative oder **Abel-Gruppe** genannt. So besitzt die Menge der reellen Zahlen \mathbb{R} bezüglich der Addition die algebraische Struktur einer kommutativen Gruppe. Das neutrale Element ist die Zahl 0 (Axiom 3), und das zu einem Element inverse ist die entgegengesetzte Zahl (Axiom 4).

Aus den vier Axiomen ergeben sich einige Folgerungen, die für das Rechnen mit reellen Zahlen von Bedeutung sind:

Bezeichnungen

Die Menge der reellen Zahlen wird mit \mathbb{R} bezeichnet. Die Zugehörigkeit einer Zahl a zur Menge \mathbb{R} wird mit $a \in \mathbb{R}$ gekennzeichnet.

Definition 1.1

Axiome der Addition

Kommutativgesetz

Assoziativgesetz

Neutrales Element

Inverses Element

Bemerkung 1.2



Niels Henrik Abel (* 5. August 1802 in der Nähe von Stavanger, † 6. April 1829 in Froland, Norwegen)
norwegischer Mathematiker

hier: Abel-Gruppen

Differenz	<p>1. Zu zwei Zahlen $a, b \in \mathbb{R}$ gibt es genau eine Zahl $x \in \mathbb{R}$, für die gilt $a + x = b$. x heißt Differenz von b und a. Man schreibt $x = b - a$ und sagt: „a wird von b subtrahiert“. Für $0 - a$ wird kurz $-a$ geschrieben (siehe Axiom 3).</p>
Entgegengesetzte Zahl	<p>2. Für jede Zahl $a \in \mathbb{R}$ gilt $a = -(-a)$, d. h., die zu $-a$ entgegengesetzte Zahl ist a. Insbesondere ist die zu 0 entgegengesetzte Zahl 0: $-0 = 0$.</p> <p>3. Für beliebige Zahlen $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ gilt</p>
Gleichheit von Differenzen	$b - a = d - c \quad \text{genau dann, wenn} \quad b + c = a + d,$ $(b - a) + (d - c) = (b + d) - (a + c),$ $(b - a) - (d - c) = (b + c) - (a + d).$
Summe von Differenzen	
Differenz von Differenzen	

Kopfrechnen**Beispiel 1.3**

Die Axiome der Addition und ihre Folgerungen werden z. B. beim „Kopfrechnen“ angewendet. So ist

$$\begin{aligned}
23 + 56 &= (20 + 3) + (50 + 6) = (20 + 50) + (3 + 6) = 79, \\
68 + (45 + 32) &= 68 + (32 + 45) = (68 + 32) + 45 = 145, \\
(145 - 56) + (37 - 44) &= (145 + 37) - (56 + 44) = 182 - 100 = 82.
\end{aligned}$$

1.2 Die Multiplikation

In diesem Abschnitt werden die vier Axiome der Multiplikation angegeben. Die Division wird mithilfe der Multiplikation erklärt. Rechenregeln für die Multiplikation und die Division werden genannt.

Definition 1.4

Zu zwei beliebigen reellen Zahlen a und b gibt es stets eine reelle Zahl $a \cdot b$, die **Produkt von a und b** genannt wird. Die Zahlen a und b heißen **Faktoren**.

Axiome der Multiplikation

Für beliebige Zahlen $a, b, c \in \mathbb{R}$ gelten folgende Axiome (Festlegungen):

Kommutativgesetz

1. $a \cdot b = b \cdot a$.

Assoziativgesetz

2. $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$.

Neutrales Element

3. Es gibt eine reelle Zahl 1 so, dass für alle $a \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$ gilt:
 $a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$.
Diese Zahl wird **Eins** genannt.

Inverses Element

4. Zu jeder Zahl $a \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$ gibt es eine Zahl $b \in \mathbb{R}$ so, dass gilt:
 $a \cdot b = b \cdot a = 1$.
Die Zahl b wird die zu a **reziproke Zahl** genannt.

Die Menge der von null verschiedenen reellen Zahlen $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ hat bezüglich der Multiplikation ebenfalls die algebraische Struktur einer kommutativen Gruppe. Das neutrale Element ist hierbei die Zahl 1 (Axiom 3), und das zu einem Element inverse ist die reziproke Zahl (Axiom 4).

Zwischen Addition und Multiplikation gibt es ein Verknüpfungsgesetz. Für beliebige Zahlen $a, b, c \in \mathbb{R}$ gilt

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c.$$

Aus den Axiomen der Multiplikation und dem Distributivgesetz ergeben sich einige Folgerungen für das Rechnen mit reellen Zahlen:

1. Ein Produkt ist genau dann gleich null, wenn mindestens einer seiner Faktoren gleich null ist, d. h., aus $a \cdot b = 0$ folgt $a = 0$ oder $b = 0$ und umgekehrt.

2. Zu zwei Zahlen $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a \neq 0$ gibt es genau eine Zahl $x \in \mathbb{R}$, für die gilt $a \cdot x = b$.
 x heißt **Quotient aus b und a** oder **Bruch** mit dem **Zähler b** und dem **Nenner a** . Man schreibt

$$x = b : a = \frac{b}{a} = b/a$$

und sagt: „ b wird durch a **dividiert**“.

3. Für jede Zahl $a \in \mathbb{R}, a \neq 0$ ist die zu a reziproke Zahl $1/a$. Insbesondere ist die zu 1 reziproke Zahl 1. Die zu $1/a$ reziproke Zahl ist a , sodass gilt

$$\frac{1}{1/a} = a.$$

4. Für beliebige Zahlen $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ mit $a, c \neq 0$ ist

$$\frac{b}{a} = \frac{d}{c} \quad \text{genau dann, wenn} \quad b \cdot c = a \cdot d,$$

d. h., **zwei Brüche sind genau dann gleich**, wenn die Produkte aus Zähler des einen und Nenner des anderen Bruches gleich sind.

5. Für beliebige Zahlen $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ ist

$$\frac{b}{a} \cdot \frac{d}{c} = \frac{b \cdot d}{a \cdot c}, \quad a, c \neq 0 \quad \text{und} \quad \frac{b}{a} : \frac{d}{c} = \frac{b \cdot c}{a \cdot d}, \quad a, c, d \neq 0,$$

d. h., **das Produkt zweier Brüche** ist ein Bruch, dessen Zähler das Produkt der Zähler der Faktoren und dessen Nenner das Produkt der Nenner der Faktoren ist, und **zwei Brüche werden dividiert**, indem der erste Bruch mit dem Reziproken des zweiten Bruches multipliziert wird.

Bemerkung 1.5

Distributivgesetz

Produkt gleich null

Quotient, Bruch

Reziproke Zahl

Gleichheit von Brüchen

Produkt von Brüchen

Quotient von Brüchen

6. Für jede Zahl $a \in \mathbb{R}$ gilt $-a = (-1) \cdot a$, d. h., die zu a entgegengesetzte Zahl $-a$ ist das Produkt der Zahlen -1 und a .
7. Für beliebige Zahlen $a, b \in \mathbb{R}$ gilt $-(a \cdot b) = (-a) \cdot b$, d. h., die zum Produkt $a \cdot b$ entgegengesetzte Zahl $-(a \cdot b)$ ist das Produkt der zu a entgegengesetzten Zahl $-a$ und der Zahl b .
8. Es gilt $(-1) \cdot (-1) = 1$, d. h., das Produkt der zu 1 entgegengesetzten Zahl -1 mit sich selbst ergibt wieder 1.

Bemerkung 1.6

Die Menge \mathbb{R} der reellen Zahlen mit den in **Definition 1.1** und **Definition 1.4** erklärten Rechenoperationen Addition und Multiplikation hat mit den jeweils vier Axiomen und dem Verknüpfungsgesetz (Distributivgesetz) die algebraische Struktur eines **Körpers**.

Malzeichen

Sind ein oder beide Faktoren eines Produktes Variablen, so kann beim Schreiben des Produktes das Malzeichen weggelassen werden. Z. B. wird geschrieben

$$a \cdot b = ab, \quad 8 \cdot b = 8b.$$

Fakultät

Das Produkt der ersten n natürlichen Zahlen wird kürzer geschrieben

$$1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n = n! .$$

Es heißt **Fakultät** von n . Vereinbarungsgemäß ist außerdem

$$0! = 1.$$

1.3 Anwendungen der Rechenoperationen

Die Rechenoperationen werden beim Umformen und Auswerten von Termen angewendet. Dabei haben Klammern Vorrang vor den „Punkt-rechenarten“ Multiplikation und Division und diese wiederum vor den „Strichrechenarten“ Addition und Subtraktion. Das Erweitern und Kürzen von Brüchen wird bei ihrer Addition und Subtraktion bzw. bei ihrer Vereinfachung benutzt. Das ganzzahlige Potenzieren einer reellen Zahl wird mit der Multiplikation erklärt. Der binomische Lehrsatz zum Potenzieren von Summen mit zwei Summanden wird angegeben.

Das Auflösen von Klammern

Steht ein Pluszeichen vor einem Summanden in Klammern, so bleibt die Klammer einfach weg. Steht ein Minuszeichen vor einem Summanden in Klammern, so sind beim Weglassen der Klammer alle in ihr vorkommenden Vorzeichen bzw. Rechenzeichen umzukehren.

Beim Auftreten von Mehrfachklammern können z. B. die Klammern von innen nach außen aufgelöst werden.

Beispiel 1.7**Auflösen von Klammern**

Es ist

$$\begin{aligned}
 8p - (15r - 7q + 6p) + (8q - p + 7r) &= 8p - 15r + 7q - 6p + 8q - p + 7r \\
 &= p + 15q - 8r, \\
 17m + (6n - (3m + 4n)) - ((8m - n) - (5m + (3n - 6m))) &= 17m + (6n - 3m - 4n) - (8m - n - (5m + 3n - 6m)) \\
 &= 17m + (2n - 3m) - (8m - n - (-m + 3n)) \\
 &= 17m + 2n - 3m - (8m - n + m - 3n) \\
 &= 14m + 2n - (9m - 4n) \\
 &= 14m + 2n - 9m + 4n = 5m + 6n.
 \end{aligned}$$

Das Ausmultiplizieren und das Ausklammern

Das Ausmultiplizieren von Klammern erfolgt nach dem Distributivgesetz. So ist z. B.

$$\begin{aligned}
 (a + b)c &= ac + bc, & a(b - c) &= ab - ac, \\
 (a + b)(c + d) &= a(c + d) + b(c + d) = ac + ad + bc + bd.
 \end{aligned}$$

Umgekehrt gelesen, ergeben sich daraus Regeln zum Ausklammern von gleichen Faktoren in Summanden:

$$\begin{aligned}
 ac + bc &= (a + b)c, & ab + ac &= a(b + c), \\
 ac - bc &= (a - b)c, & ab - ac &= a(b - c).
 \end{aligned}$$

Beispiel 1.8**Ausmultiplizieren, Ausklammern**

Im ersten Beispiel wird zuerst jeder Summand der ersten Klammer mit der zweiten Klammer multipliziert und danach diese ausmultipliziert. Im zweiten Beispiel wird der Faktor $x - y$ ausgeklammert.

$$\begin{aligned}
 (a + 4b - 7c)(x - y) &= a(x - y) + 4b(x - y) - 7c(x - y) \\
 &= ax - ay + 4bx - 4by - 7cx + 7cy, \\
 n(x - y) - x + y &= n(x - y) - (x - y) = (n - 1)(x - y).
 \end{aligned}$$

Addition und Subtraktion von Brüchen

Das **Erweitern** eines Bruches ist das Multiplizieren seines Zählers und Nenners mit *derselben* Zahl, das **Kürzen** entsprechend das Dividieren durch *dieselbe* Zahl. Erweitern und Kürzen verändern den Wert eines Bruches nicht:

$$\frac{a}{c} = \frac{ad}{cd}, \quad \frac{ad}{cd} = \frac{a}{c}.$$

Gleichnamige Brüche (d. h., Brüche, deren Nenner gleich sind,) werden

Erweitern und Kürzen**Gleichnamige Brüche**

addiert bzw. subtrahiert, indem ihre Zähler addiert bzw. subtrahiert werden und der Nenner beibehalten wird:

$$\frac{a}{c} \pm \frac{b}{c} = \frac{a \pm b}{c}.$$

Ungleichnamige Brüche

Ungleichnamige Brüche werden addiert bzw. subtrahiert, indem sie durch Erweitern gleichnamig gemacht und dann addiert bzw. subtrahiert werden:

$$\frac{a}{b} \pm \frac{c}{d} = \frac{ad}{bd} \pm \frac{bc}{bd} = \frac{ad \pm bc}{bd}.$$

Hauptnenner

Beispiel 1.9

Der Hauptnenner der zu subtrahierenden Brüche ist $(x-1)(x-2)$. Der erste Bruch wird mit $(x-2)$, der zweite mit $(x-1)$ erweitert:

$$\frac{4}{x-1} - \frac{3}{x-2} = \frac{4(x-2) - 3(x-1)}{(x-1)(x-2)} = \frac{x-5}{(x-1)(x-2)}.$$

Das Potenzieren

Die n -ten **Potenz einer reellen Zahl** a ist das Produkt aus n Faktoren, die alle gleich a sind:

$$a^n = a \cdot a \cdot \dots \cdot a, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Dabei wird die reelle Zahl a **Basis** und die natürliche Zahl n **Exponent** der Potenz a^n genannt.

Insbesondere ist $a^1 = a$.

Vereinbarungsgemäß ist für eine beliebige reelle Zahl $a \neq 0$ stets $a^0 = 1$.

Potenzgesetze

Es gelten folgende **Potenzgesetze** für das Multiplizieren und Dividieren von Potenzen:

- Potenz von Produkt, Quotient**
- Produkt, Quotient von Potenzen**
- Potenz, negativer Exponent**
- Potenz einer Potenz**

$$\begin{aligned} (a \cdot b)^n &= a^n \cdot b^n, & (a/b)^n &= a^n/b^n, \\ a^m \cdot a^n &= a^{m+n}, & a^m/a^n &= a^{m-n}, \\ a^{-n} &= 1/a^n & &= (1/a)^n, \\ (a^m)^n &= (a^n)^m & &= a^{mn}. \end{aligned}$$

Zusammenfassen von Potenzen

Beispiel 1.10

Potenzen werden nach gleichen Basen zusammengefasst:

$$\begin{aligned} (xy)^{m+n} (yz)^{2m-n} (xz)^{m-2n} &= x^{m+n} y^{m+n} z^{2m-n} x^{m-2n} z^{m-2n} \\ &= x^{m+n+m-2n} y^{m+n+2m-n} z^{2m-n+m-2n} \\ &= x^{2m-n} y^{3m} z^{3m-3n}, \\ \frac{a^{1-m}}{a^{n+1}} &= a^{(1-m)-(n+1)} = a^{-(m+n)} = \frac{1}{a^{m+n}}. \end{aligned}$$

Die binomischen Formeln und der binomische Lehrsatz

Die binomischen Formeln ergeben sich, wenn folgende Klammern nach dem Distributivgesetz ausmultipliziert werden:

$$\begin{aligned}(a+b)^2 &= a^2 + 2ab + b^2, \\ (a-b)^2 &= a^2 - 2ab + b^2, \\ (a+b)(a-b) &= a^2 - b^2.\end{aligned}$$

1. Binomische Formel
2. Binomische Formel
3. Binomische Formel

Bei steigenden Potenzen ergibt sich durch fortgesetztes Ausmultiplizieren der Klammern

$$\begin{aligned}(a+b)^3 &= a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3, \\ (a+b)^4 &= a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4, \\ (a+b)^5 &= a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5 \text{ usw.}\end{aligned}$$

Für die n -te Potenz der Summe $a+b$ gilt der **binomische Lehrsatz** als Regel zum Ausmultiplizieren:

$$\begin{aligned}(a+b)^n &= \binom{n}{0} a^n b^0 + \binom{n}{1} a^{n-1} b^1 + \binom{n}{2} a^{n-2} b^2 + \dots \\ &\quad + \binom{n}{n-1} a^1 b^{n-1} + \binom{n}{n} a^0 b^n \\ &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} b^k.\end{aligned}$$

Binomischer Lehrsatz

Dabei sind die Ausdrücke $\binom{n}{k}$ die **Binomialkoeffizienten**. Für ihre Berechnung gilt

$$\binom{n}{k} = \frac{n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot (n-k+1)}{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot k} = \frac{n!}{k! (n-k)!}, \quad \binom{n}{0} = 1.$$

Beispiel 1.11

Die Binomialkoeffizienten für die Potenz $(a+b)^5$ berechnen sich z. B. wie folgt:

$$\begin{aligned}\binom{5}{0} &= 1, & \binom{5}{1} &= \frac{5}{1} = 5, & \binom{5}{2} &= \frac{5 \cdot 4}{1 \cdot 2} = 10, & \binom{5}{3} &= \frac{5 \cdot 4 \cdot 3}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 10 \\ \binom{5}{4} &= \frac{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} = 5, & \binom{5}{5} &= \frac{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} = 1.\end{aligned}$$

Berechnung von Binomialkoeffizienten

Folgende **Eigenschaften der Binomialkoeffizienten** lassen sich leicht nachweisen:

$$\binom{n}{n} = 1, \quad \binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}, \quad \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}.$$

Eigenschaften der Binomialkoeffizienten

Sei n eine natürliche Zahl. Die n -te **Wurzel** $a = \sqrt[n]{b}$ aus einer *nicht negativen* reellen Zahl b ist die *nicht negative* reelle Zahl a , deren n -te Potenz a^n den Wert b hat: $a^n = b$. Das Ermitteln der Wurzel aus einer reellen Zahl heißt **Radizieren**.

Definition 1.15**Beispiel 1.16**

Es ist z. B. $\sqrt[3]{8} = 2$, $\sqrt[3]{0.125} = 0.5$, $\sqrt[5]{0} = 0$.

Radizieren

Für das Rechnen mit Wurzeln ergeben sich einige Folgerungen:

1. Es gilt $\sqrt[n]{1} = 1$, da $1^n = 1$ ist.
Es gilt $\sqrt[n]{0} = 0$, da $0^n = 0$ ist.
Es gilt $\sqrt[1]{b} = b$, da $b^1 = b$ ist.
2. Aus $a^n = b$ folgt dann $a = \sqrt[n]{b}$, wenn a und b *nicht negativ* sind. Radizieren und Potenzieren sind im Bereich *nicht negativer* reeller Zahlen Umkehrungen voneinander.

Beispiel 1.17

1. Aus der Gleichung $9 = 3^2$ folgt $\sqrt{9} = 3$.
2. Aus der Gleichung $9 = (-3)^2$ folgt *nicht* $\sqrt{9} = -3$, sondern $\sqrt{9} = |-3| = 3$.
3. Die Gleichung $x^2 = b$ mit der gegebenen *nicht negativen* reellen Zahl b hat die Lösungen $x = \sqrt{b}$ und $x = -\sqrt{b}$. Wird die Quadratwurzel auf beiden Seiten der Gleichung gebildet, so ergibt sich links für $x \geq 0$ die *nicht negative* Zahl x und für $x < 0$ die *nicht negative* Zahl $-x$. Rechts ergibt sich \sqrt{b} .
4. Ist n eine *ungerade natürliche Zahl*, so ist die n -te Wurzel aus der *negativen* reellen Zahl b diejenige *negative* Zahl a , für die $a^n = b$ gilt.

Quadratwurzel ist nicht negativ**Beispiel 1.18**

Z. B. gilt $\sqrt[3]{-27} = -3$, $\sqrt[5]{-32} = -2$, $\sqrt[n]{-1} = -1$ für *ungerade* natürliche Zahlen n .

Wurzel aus negativer Zahl

5. Die Gleichung $x^n = b$ mit $b < 0$ hat nur dann eine reelle Lösung x , wenn n ungerade ist. Dann ist $x < 0$.
Die Gleichung $x^n = b$ mit $b > 0$ hat genau die positive reelle Lösung $x = \sqrt[n]{b}$, wenn n ungerade ist. Wenn n gerade ist, existieren genau zwei Lösungen: $x = \sqrt[n]{b}$ (positiv) und $x = -\sqrt[n]{b}$ (negativ). Die Probe zeigt jeweils, dass die angegebenen Zahlen x auch wirklich Lösung der Ausgangsgleichung sind.

Potenzgleichungen**Beispiel 1.19**

1. Die Gleichung $x^5 = -243$ hat die (negative) Lösung $x = \sqrt[5]{-243} = -3$.
2. Die Gleichung $x^5 = 243$ hat die (positive) Lösung $x = \sqrt[5]{243} = 3$.
3. Die Gleichung $x^4 = 81$ hat die (positive) Lösung $x = \sqrt[4]{81} = 3$ und die (negative) Lösung $x = -\sqrt[4]{81} = -3$.

Wurzelgesetze

Für das Rechnen mit Wurzeln und das Radizieren arithmetischer Ausdrücke gibt es folgende **Wurzelgesetze**:

- Wurzel aus Produkt**
- Wurzel aus Quotienten**
- Wurzel aus Wurzel**
- Wurzel aus Potenz**
- Rationale Exponenten**

$$\begin{aligned} \sqrt[n]{a^m} &= a, \quad (\sqrt[n]{a})^n = a, \quad \sqrt[n]{a^{mn}} = a^m, \\ \sqrt[n]{ab} &= \sqrt[n]{a} \sqrt[n]{b}, \\ \sqrt[n]{a/b} &= \sqrt[n]{a} / \sqrt[n]{b}, \\ \sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} &= \sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = m\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{mn}}, \\ \sqrt[n]{a^m} &= a^{\frac{m}{n}}, \\ a^{\frac{m}{n}} \cdot a^{\frac{p}{q}} &= a^{\frac{m}{n} + \frac{p}{q}}, \quad a^{\frac{m}{n}} / a^{\frac{p}{q}} = a^{\frac{m}{n} - \frac{p}{q}}, \\ (ab)^{\frac{m}{n}} &= a^{\frac{m}{n}} b^{\frac{m}{n}}, \quad (a/b)^{\frac{m}{n}} = a^{\frac{m}{n}} / b^{\frac{m}{n}}. \end{aligned}$$

Anwendung der Wurzelgesetze**Beispiel 1.20**

Mit den Wurzelgesetzen ergibt sich

1. $\sqrt{b^{2x}} = b^x$,
2. $\sqrt[3]{12x^6y^9} = \sqrt[3]{12} \sqrt[3]{(x^2)^3} \sqrt[3]{(y^3)^3} = \sqrt[3]{12} x^2 y^3$ (Wurzel aus Produkt),
3. $\sqrt{\frac{5}{9}} = \frac{\sqrt{5}}{3}$ (Wurzel aus Quotienten),
4. $\sqrt[4]{\sqrt{256}} = 2$ (Wurzel aus Wurzel),
5. $\sqrt[nx]{a^{mx}} = \sqrt[n]{a^m}$ (Wurzel aus Potenz).

Treten im Nenner von arithmetischen Ausdrücken Wurzeln auf, so können sie durch äquivalente Umformungen beseitigt werden.

Wurzelfreier Nenner**Beispiel 1.21**

$$\text{Es ist } \frac{1}{\sqrt{a} - \sqrt{b}} = \frac{1 \cdot (\sqrt{a} + \sqrt{b})}{(\sqrt{a} - \sqrt{b})(\sqrt{a} + \sqrt{b})} = \frac{\sqrt{a} + \sqrt{b}}{a - b}.$$

Hier wurde der Bruch mit $\sqrt{a} + \sqrt{b}$ erweitert, sodass der Nenner nach der dritten binomischen Formel dadurch wurzelfrei ist.

1.5 Anordnung reeller Zahlen, Ungleichungen

Mithilfe von vier Axiomen (Festlegungen) wird ermöglicht, dass reelle Zahlen miteinander verglichen werden können. Daraus ergeben sich

Sachwortverzeichnis

- Abbildung, 23, 164
 - bijektive, 27
- Ableitung, 187, 189, 205, 209, 212, 214, 216, 217, 219, 221, 230, 231, 239, 240, 243
 - dritte, 192
 - erste, 200–202
 - höhere, 192, 193, 206
 - vierte, 192
 - zweite, 192, 202, 204
- Abstand, 22, 57, 70, 118, 120, 121, 124, 125, 128, 130–132, 134–139, 142, 143, 150–152, 159, 161, 169, 170, 211, 217, 240, 252
- Absteckung, 161
- Addition, 11, 13–15, 21, 35, 59, 60, 67, 72, 73, 78, 82, 87
- Additionstheorem, 45, 46, 56, 122, 161, 232
- Adjunkte, 80, 83
- Annuität, 52, 54, 55
- Antisymmetrie, 112
- Arbeit, 110
- Arcuscosinus, 47
- Arcussinus, 46
- Arcustangens, 47
- Argument, 24, 27, 28, 36, 42, 46, 47
- Assoziativgesetz, 11, 12, 60, 72, 73
- Axiom, 59
 - von Newton, 31
- Axiome, 11–14, 20
 - der Addition, 11, 12
 - der Multiplikation, 12, 13
- Basis, 16, 42, 43, 58, 69, 90, 109, 190
 - kanonische, 69, 104, 109, 111, 112
 - Orthogonal-, 109
 - Orthonormal-, 109, 154
 - vektoren, 69, 153, 154
 - wechsel, 153, 154
- beschränkt, 26, 27, 29, 30, 45, 166, 167, 169–172, 180, 225, 226, 229
 - nach oben, 26, 34, 166, 224
 - nach unten, 26, 32–34, 42, 166, 224
- Beschränktheit, 23, 25, 26, 165, 180, 221
- Betrag, 104–106, 108–111, 113–115, 120, 134, 135, 142, 143, 149, 159, 162
- Biegelinie, 193, 199, 214
- Biegemoment, 36, 52, 188, 192, 214, 254, 255
- Binomialkoeffizienten, 17, 18
- binomische(r)
 - Formeln, 17, 20
 - Lehrsatz, 17, 18
- Bogenlänge, 213, 238, 239
 - differenzial, 211
- Bogenmaß, 44
- Brennpunkt, 125, 128, 130, 132
- Bruch, 13, 15, 16, 20
- Brüche
 - gleichnamige, 15
 - ungleichnamige, 16
- Definitionsbereich, 24, 28–30, 33, 41, 43, 178, 180, 187, 189, 200, 202
- Determinante, 79–84, 100, 102, 115, 119, 123, 137, 142, 160, 162
- Diagonalisierung, 95
- Differenz, 12, 38, 41, 61, 62, 114, 122, 128, 147, 171, 176, 179
- Differenzenquotient, 187, 188, 190, 230
- Differenzial, 194, 234
 - Bogen-, 212, 213, 244, 245
- Dimension, 58, 69, 70, 72, 73, 75, 76, 87, 90, 92
- Diskriminante, 36
- Distributivgesetz, 13–15, 17, 60, 67, 73, 75, 107, 112, 114
- Divergenz, 169, 175, 196
 - bestimmte, 175, 179
 - unbestimmte, 175
- Division, 12, 14, 24, 25, 39, 119
 - Polynom-, 37, 39
- Dreiecksungleichung, 32, 105, 108
- Durchbiegung, 52, 193, 214
- Ebene, 116, 140–142, 144–150, 154
 - allgemeine Form, 140–143
 - Hesse-Normalform, 140, 142, 143
 - Lagebeziehungen, 145–148
 - Parameterform, 142
- Eigenfrequenz, 103
- Eigenschwingung, 103
- Eigenvektor, 94–96, 103
- Eigenwert, 94–96, 103
- eindeutig, 23, 65, 66, 69, 75, 84, 85, 88, 90–92, 117, 140, 145, 160, 164, 165
- Einheitsvektor, 104, 105, 111, 119, 149–152, 154–156, 210
 - zugehöriger, 105, 106, 136, 151
- Eins, 12, 18, 78
- Element, 22–24, 59–61, 67, 69–71, 74, 75, 78, 82, 83, 138
 - Hauptdiagonal-, 75, 78, 81, 82
 - inverses, 11–13, 60, 61, 72
 - neutrales, 11–13, 60
 - Nichtnull-, 78, 79
 - Null-, 61, 68, 72
- Ellipse, 125–127, 213, 239
 - Normalform, 125–127
 - Parameterform, 126

- sektor, 243
- Tangente, 126, 127
- Entwicklungssatz von Laplace, 81
- Erweitern, 15, 16
- Erzeugendensystem, 67–69
- Euler-Zahl, 42, 173
- Exponent, 16, 18, 20, 33, 43, 58
- Exzentrizität
 - lineare, 125, 128
- Fahrbahnverziehung, 215
- Faktor, 12–16, 66, 101
- Fakultät, 14
- Fehler
 - absoluter, 193, 195, 207
 - relativer, 193, 195
- Flächeninhalt, 50, 51, 112–114, 124, 162, 163, 195, 223, 230, 241, 242
- Folge, 164, 169, 171–175, 182, 183, 224–226
 - Element der -, 165
 - Glieder der -, 165, 169, 170, 172
 - konvergente, 172, 225
- Fredholm-Alternative, 91
- Freiheitsgrad, 86–88, 99
- Fundamentalsystem, 90, 91
- Funktion, 23, 24, 26, 28, 35, 126, 129, 177, 178, 189, 199, 205, 223, 230, 240–242, 247, 249
 - äußere, 28
 - Betrags-, 31
 - differenzierbare, 187, 189, 192, 199, 200, 202–204, 230, 231, 235, 236, 239
 - divergente, 175
 - Exponential-, 41
 - gerade, 45
 - gleichung, 24, 27, 29–31, 33–37, 40–42, 45–47, 52
 - Graph, 24, 25, 27
 - innere, 28
 - integrierbare, 226–228, 231, 233
 - konkave, 202
 - konstante, 29, 253
 - konvexe, 201, 202
 - Kosinus-, 45
 - Kotangens-, 46
 - lineare, 30, 31, 35
 - linksseitig differenzierbar, 188, 189
 - Logarithmus-, 42
 - Potenz-, 33
 - rationale, 40, 41
 - rechtsseitig differenzierbar, 188, 189
 - reelle, 24
 - Reziprok-, 34
 - Signum-, 29
 - Sinus-, 27, 45
 - stetige, 177, 179–181, 186, 189, 225, 229, 249
 - streng konkave, 202
 - streng konvexe, 202
 - Tangens-, 46
 - trigonometrische, 44
 - Umkehr-, 27, 28, 30, 33, 34, 42, 46, 47, 49
 - ungerade, 45
 - Verkettung, 28, 38, 41
 - wert, 24, 38
 - Wurzel-, 33
- Gauß-Algorithmus, 70, 78, 82, 84, 86, 87, 90, 91, 93, 97, 144, 145
- Gerade, 113, 116–124, 126, 129, 131–135, 138–141, 145–148, 157, 159, 186, 201, 217, 219, 223, 226
 - Achsenabschnittsform, 118, 120
 - allgemeine Gleichung, 119, 122, 124, 126, 131
 - Hesse-Normalform, 119–121, 124
 - Lagebeziehungen, 122, 123, 139, 147, 148
 - Momentenform, 133
 - Normalform, 118, 120, 122
 - Parameterform, 117, 124, 145, 158, 160
 - Punkttrichtungsform, 117, 118, 133, 134
 - windschief, 135
 - Zweipunkteform, 118, 120, 133
- Gesetz
 - von Hooke, 31
- Gleichheit, 12, 13, 35, 59, 63, 64, 71, 73
- Gleichung, 24, 31, 35, 39, 43, 44, 49, 74, 87–89, 100
 - algebraische, 38
 - lineare, 30
 - quadratische, 36, 37
- Gleichungssystem
 - lineares, 70, 85, 88, 90, 93, 97, 102, 104, 136–138, 144, 145, 160, 192, 220
- Gradmaß, 44
- Grenzwert, 187, 230, 238
 - einseitiger, 188
 - linksseitiger, 174, 177, 179
 - rechtsseitiger, 174, 177, 179
 - von Funktionen, 174, 175, 177, 195–197
 - von Zahlenfolgen, 170–173, 182, 224, 227
- Hauptachse, 125, 128
- Hauptscheitelpunkt, 125, 128
- Hauptträgheitsachse, 96
- Hauptträgheitsmoment, 96
- Höhe, 48–51, 115, 124, 134, 157, 162
- homogen, 85, 89–91, 102
- Horner-Schema, 38, 39, 205
 - fortlaufendes, 39
 - vollständiges, 40
- Hyperbel, 128
 - Asymptoten, 129
 - Normalform, 128
 - Parameterform, 129
 - Tangente, 129, 130
- Hypotenuse, 47, 108
- Identität von Lagrange, 137
- Infimum, 26, 166, 167, 169, 180, 224, 225
- inhomogen, 85, 91
- Inkreisradius, 51

- Integral
 bestimmtes, 226, 230, 232, 238
 unbestimmtes, 233–236
- Integrationsgrenze, 228, 240, 244, 245, 257
 obere, 226, 230, 232
 untere, 226, 232
- Integrationsvariable, 226, 237
- Integrieren, 237
 logarithmisches, 236
 partiell, 236
- Invarianz, 60, 73, 76
- invertierbar, 79, 83, 92
- Kathete, 47, 108
- Kleinpunkte, 157
- Klothoide, 213, 220, 237, 238
 Einheits-, 238
- Koeffizienten, 35, 36, 39, 60, 62, 64–66, 69, 70, 85, 119,
 180, 192, 206, 214, 216, 219
 -vergleich, 37, 39
- kollinear, 66
- kommutativ, 73, 75
- kommutative Gruppe, 11, 13
- Kommutativgesetz, 11, 12, 60, 72, 75, 107
- komplanar, 66
- Konvergenz, 169, 173, 175, 225
- Koordinaten, 104, 112, 116, 120, 125, 126, 128, 131, 132,
 143, 144, 149, 157, 159, 162, 212
 kartesische, 150, 151
 Kugel-, 149, 152
 Polar-, 149, 150, 212
 Zylinder-, 149, 151
- Koordinatensystem, 104, 111, 124, 127, 131, 132, 149,
 154–156
 ebenes, 150
 gedrehtes, 155
 kartesisches, 124, 125, 128, 149, 154, 155, 157, 159,
 161
 räumliches, 151
 verschobenes, 155
- Koordinatentransformation, 149, 153–155, 206
- Körper, 14
- Kosinus, 44, 45, 47, 48
 Richtungs-, 111, 119
 -satz, 48–50, 55
- Kosinus hyperbolicus, 129
- Kotangens, 45
- Kraft, 31, 101, 104, 107, 110, 114, 115, 134, 203
 resultierende, 62
 -vektor, 65, 66
- Kreis, 127, 161, 164, 208, 213, 239, 253
 -bogen, 219, 220, 239
 Parameterform, 127
 Tangente, 161
- Krümmung, 210–213
 -kreis, 211, 217, 218
 -radius, 210–212
 -verhalten, 202, 203
- Kuppen- und Wannenausrundung, 217
- Kurve, 126, 149, 186–188, 210–213, 238–240, 242, 245,
 248–252, 254
 -zweiter Ordnung, 116, 124
- Kürzen, 15
- linear abhängig, 63–65, 68, 116
- linear unabhängig, 63–66, 68, 69, 77, 78, 90, 109, 141
- Linearfaktor, 37, 39, 41
- Linearität, 105, 107, 112, 235, 256
- Linearkombination, 58, 62–66, 68, 69, 90, 91, 142, 227,
 228, 233
- Lösung, 128, 130, 138, 149
 Gleichungssystem, 84–86, 90–92, 99, 102, 122, 145,
 160
- Lotfußpunkt, 120, 121, 130, 131, 135, 136, 138, 142, 143,
 159, 161
- Lücke, 41, 178, 226
- Majorantenkriterium, 171, 172
- Mantelfläche, 244, 245, 251
- Matrix, 70–75, 77–79, 81, 87, 92, 153, 154
 Diagonal-, 76, 78, 79
 Dreiecks-, 82, 83
 Einheits-, 76, 77, 84, 93
 erweiterte Koeffizienten-, 86, 90, 92, 99, 144, 145
 Hesse-, 119
 inverse, 70, 79, 83, 84, 92, 93, 153
 Koeffizienten-, 58, 70, 79, 86–93, 97, 102, 137, 144,
 145, 160
 Null-, 72, 75, 77
 obere Dreiecks-, 82, 93
 quadratische, 70, 72, 75, 79, 80, 93
 -schreibweise, 85, 90, 97, 100–102
 symmetrische, 72
 Transformations-, 154
 transponierte, 71, 72, 76, 77, 82, 83
 untere Dreiecks-, 82
 Vielfaches, 70, 72
- Maximum
 globales, 199
 lokales, 199, 201, 202, 214
- Mengenermittlung, 162
- Minimum
 globales, 199
 lokales, 199, 201, 202
- Mittelpunkt, 125, 127, 128, 130, 161
- Mittelwertsatz
 der Differentialrechnung, 204, 239, 242
 der Integralrechnung, 229, 231, 247
- Moment, 107, 114, 134, 193, 201, 246
 Achs-, 114, 115
 Flächen-, 247, 252
 Punkt-, 114
 statisches, 247–249
- monoton, 167, 173, 200, 202
 fallend, 25, 28, 29, 52, 167, 170, 200, 224, 225
 steigend, 25, 29, 52, 167, 170, 200, 224, 225

- Monotonie, 21, 23, 25, 28, 165, 200
 Multiplikation, 11–14, 18, 21, 28, 35, 59, 60, 67, 73, 74,
 78, 87, 93, 106
 Matrix-, 75, 76
 skalare, 111
 Vektor-, 76
- Näherung
 lineare, 194
- Nebenachse, 125, 128
 Nebenscheitelpunkt, 125, 128
 Nenner, 13, 65
 Null, 11, 13, 24, 26, 52, 64–66, 78, 89, 92, 102, 108, 137
 Nullfolge, 171, 172, 175
 Nullstelle, 24, 25, 29, 30, 33, 36, 37, 39–41, 43, 45, 46,
 52, 181, 188, 204, 214, 215, 241
- Obersumme, 225, 226
 Ordnungsrelation, 21
 orthogonal, 95, 96, 108, 109, 126
- Parabel, 130, 132, 215, 217
 Achse, 130
 Leitlinie, 130
 Normalform, 131
 Parameterform, 131
 Tangente, 131, 132
- parallel, 61, 66, 113, 117, 118, 122, 124, 127, 128, 130,
 132, 135–137, 139–141, 145, 147, 148, 159,
 204
- Parameterform, 213, 239, 240, 242, 243, 245
 Periode, 45, 46
 Polstelle, 40, 41, 46, 179
 Polygonzug, 56
 Polynom, 35–40, 51, 52, 60, 61, 180, 192, 193, 205, 206,
 214, 219, 221
 Taylor-, 205, 207–209, 221, 222
 Vielfaches, 61
- Positive Definitheit, 105, 107, 112
 Potenz, 16–20, 39, 40, 43, 58
 -gesetze, 16, 42
 -gleichungen, 20
- Potenzieren, 14, 16, 19
 Produkt, 12–14, 16, 20, 32, 34, 37, 38, 41, 43, 48, 50,
 70, 73–76, 81–84, 105, 106, 110, 134, 163,
 171, 179, 180, 197, 247, 251, 252, 256
- Projektion, 106, 107, 110, 114, 115
 proportional, 30, 31
 Proportionalitätsfaktor, 30, 31
- Querkraft, 36, 52, 188, 192, 254, 255
 Quotient, 13, 16, 20, 32, 41, 43, 45, 47, 172, 176, 180,
 186, 195, 197
- Radiant, 44
 Radizieren, 19, 20
 Rang, 70, 78, 79, 86, 88, 90, 92, 144, 145
 -kriterium, 84, 86
- Spalten-, 77, 78
 Zeilen-, 77, 78
- Regel
 Ableitung-, 189, 190, 232
 Grenzwert-, 172, 175
 Substitutions-, 237
 von Cramer, 84, 92, 97, 100, 122, 137, 146, 160,
 220
 von Guldin, 251, 252
 von l'Hospital, 195–197
- Reihe
 harmonische, 185
 Taylor-, 209
- Restglied, 207, 209
 Restschuld, 52–54
 Rotation, 154, 155
 -matrix, 155
- Rotationskörper, 243, 244, 249–251, 253
 Rückwärtseinschneiden, 55
- Satz
 des Pythagoras, 108, 125, 129, 131
 des Thales, 108
 von Bolzano, 181
 von Rolle, 204
 von Weierstraß, 180
- Scheitelpunkt, 130, 132, 216, 217
 Schnittgerade, 145
 Schnittkraft, 36, 51
 Schnittpunkt, 122, 123, 139, 144, 157, 159, 188
 Schranke, 207
 obere, 26, 166, 169, 170
 untere, 26, 166, 169, 170
- Schwerpunkt, 101, 183, 185, 203, 246, 249, 251
 einer Fläche, 249
 einer Kurve, 250
 eines Rotationskörpers, 250
- Schwingungssystem, 102
 Seitenhalbierende, 50
 Sektorformel von Leibniz, 243
 Sinus, 44, 45, 47, 50
 -satz, 48, 49, 55, 56
 Sinus hyperbolicus, 129
 Skalarprodukt, 107–112, 135, 137
 Koordinatendarstellung, 109
- Spatprodukt, 115, 116, 136, 141, 162
 Koordinatendarstellung, 115
- Sprungstelle, 179
 Stammfunktion, 231–233, 237
 Steigung, 117, 118, 122, 157, 186, 187, 212, 218
 Stelle
 kritische, 200–204, 215
- stetig, 177, 178
 linksseitig, 177
 rechtsseitig, 177
- streng monoton
 fallend, 25, 28, 30, 32–34, 41, 43, 45–47
 steigend, 25, 28, 30, 32, 33, 41, 43, 45–47

- Subtraktion, 11, 14, 15, 53, 98
Summand, 11, 14, 15, 18, 35
Summe, 11, 12, 14, 17, 18, 35, 37, 38, 41, 48, 50, 51, 53,
58, 59, 61, 62, 66, 67, 70, 72, 74, 77, 91, 110,
125, 157, 158, 162, 171, 176, 179
Supremum, 26, 166, 180, 224, 225
- Tangens, 45, 47
Tangente, 186, 187, 194, 204, 205, 210, 211, 213
-schnittpunkt, 157, 217
Tilgung, 52, 54
-zeitraum, 54
Trägheitsmoment, 252, 253
polares, 254
Trägheitstensor, 96
Trapezform, 87, 88, 93
- Übergangsbogen, 219
Überhöhungsrampe, 219
Umkreisradius, 50
unbeschränkt, 23, 26, 30, 33, 34, 43, 46, 172, 175, 180
nach oben, 26, 32–34, 42, 167
nach unten, 26, 34
Unendlichkeitsstelle, 179, 180
Unstetigkeitsstelle, 177, 178, 181
hebbare, 178
Unterraum, 67–69, 90, 109
Untersumme, 225
- Vektor, 58–70, 73, 77, 85, 92, 93, 104–108, 111, 112,
114, 119, 131, 136, 141, 142, 153, 159
Hauptnormalen-, 210
Hauptnormaleneinheits-, 210, 211
kanonischer, 69, 76, 77, 92, 111
Normalen-, 119–123, 126, 128, 131, 140–145, 147–
149, 159, 212, 213
Null-, 123
Orts-, 61, 66, 102, 213
Richtungs-, 114, 115, 117, 120, 121, 124, 126, 131–
139, 141, 145, 147, 148, 158, 159, 210
-schreibweise, 85
Spalten-, 71, 73, 74, 76–78, 92
Tangenten-, 210, 212, 213
Tangenteneinheits-, 210, 211
Vielfaches, 58, 59, 61, 62, 66
Zeilen-, 71, 77
- Vektorprodukt, 112, 113, 115, 123, 134, 136, 149
Koordinatendarstellung, 112, 134
Vektorraum
linearer, 58, 60, 61, 63, 73
Vergleichskriterium, 172, 224, 225
Volumen, 115, 116, 162, 243, 250, 251
Vorwärtseinschneiden, 55
- Wendepunkt, 203
Wertebereich, 24, 28, 49
Winkel, 111, 121, 138, 144, 147, 149–152, 154, 161, 164,
203, 240, 242
Richtungs-, 111
Winkelhalbierende, 27, 50, 51
Wurzel, 18–20, 32
gesetze, 20
Quadrat-, 18, 19
-satz von Vieta, 37
- Zahl, 58–60, 67, 77, 82, 86, 87, 89, 99
entgegengesetzte, 11, 12, 14
natürliche, 14, 16, 19
reelle, 11–14, 16, 18–20, 22, 29, 30
reziproke, 12, 13
Zahlenfolge, 164–169, 171, 173, 175, 183
divergente, 170, 172
konvergente, 170
Zahlengerade, 21, 22
Zähler, 13
Zerlegungsstelle, 206–209
Zwischenpunkte, 157
Zwischensumme, 225–227