

# 1 Einführung

## 1

### 1.1 Warum Festigkeitslehre?

Die Festigkeitslehre ist ein Grundlagenfach in allen Ingenieurwissenschaften. Sie stellt den planenden Ingenieuren Methoden zur Verfügung, mit denen sie dauerhafte und gebrauchstaugliche Tragwerke mit einer ausreichenden Tragsicherheit entwerfen, berechnen und bemessen können.

Im Bereich des Bauwesens ist die Festigkeitslehre ein Grundlagenfach in der Statik, auf dem alle konstruktiven Fächer wie beispielsweise Stahlbetonbau, Stahlbau, Holzbau, Mauerwerksbau oder Geotechnik aufbauen. Mithilfe der Festigkeitslehre gelingt es,

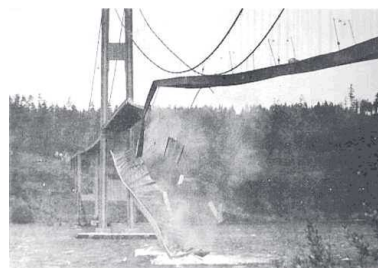
- die **Beanspruchungen** im Inneren eines Bauteils infolge der einwirkenden Lasten zu bestimmen,
- die **Abmessungen der Bauteile** eines Tragwerks unter Beachtung der Festigkeit der verwendeten Werkstoffe und einer angemessenen Sicherheit festzulegen,
- die **Beanspruchbarkeit** bestehender Bauteile oder Tragwerke bei gegebener Geometrie und bekannten Werkstoffparametern zu ermitteln,
- und die **Verformungen** des Tragwerks bzw. seiner Bauteile aufgrund der Beanspruchungen zu berechnen und gegebenenfalls durch Änderung von Bauteilgeometrie und/oder Werkstoffen zu begrenzen.

Die Festigkeitslehre darf nicht als isoliertes Lehrfach begriffen werden. Sie steht im Wechselspiel mit der Statik und liefert wichtige Grundlagen für Statiker und Tragwerksplaner.

*Bild 1.2* zeigt die Bedeutung der Festigkeitslehre während des Planungsprozesses eines Bauwerks. Bei allen an der Planung, Bemessung und Konstruktion von Bauwerken Beteiligten wird ein umfassendes Verständnis über das Tragverhalten von Bauwerken vorausgesetzt. Eigenschaften und Grenzen der verwendeten Baustoffe müssen bekannt und die mechanischen Zusammenhänge zwischen den Lasten, die auf ein Tragwerk einwirken, und den Reaktionen des Tragwerks darauf wie z.B. Verformungen, Materialversagen oder Stabilitätsversagen (Knicken, Kippen) verstanden sein.

Im Zuge der Tragwerksplanung werden mehrere **Planungsphasen** durchlaufen, in denen die Festigkeitslehre entscheidende Beiträge liefert. Bei der Modellierung des Tragsystems müssen idealisierende, jedoch geeignete und mechanisch sinnvolle Annahmen hinsichtlich des Werkstoffs, der Geo-

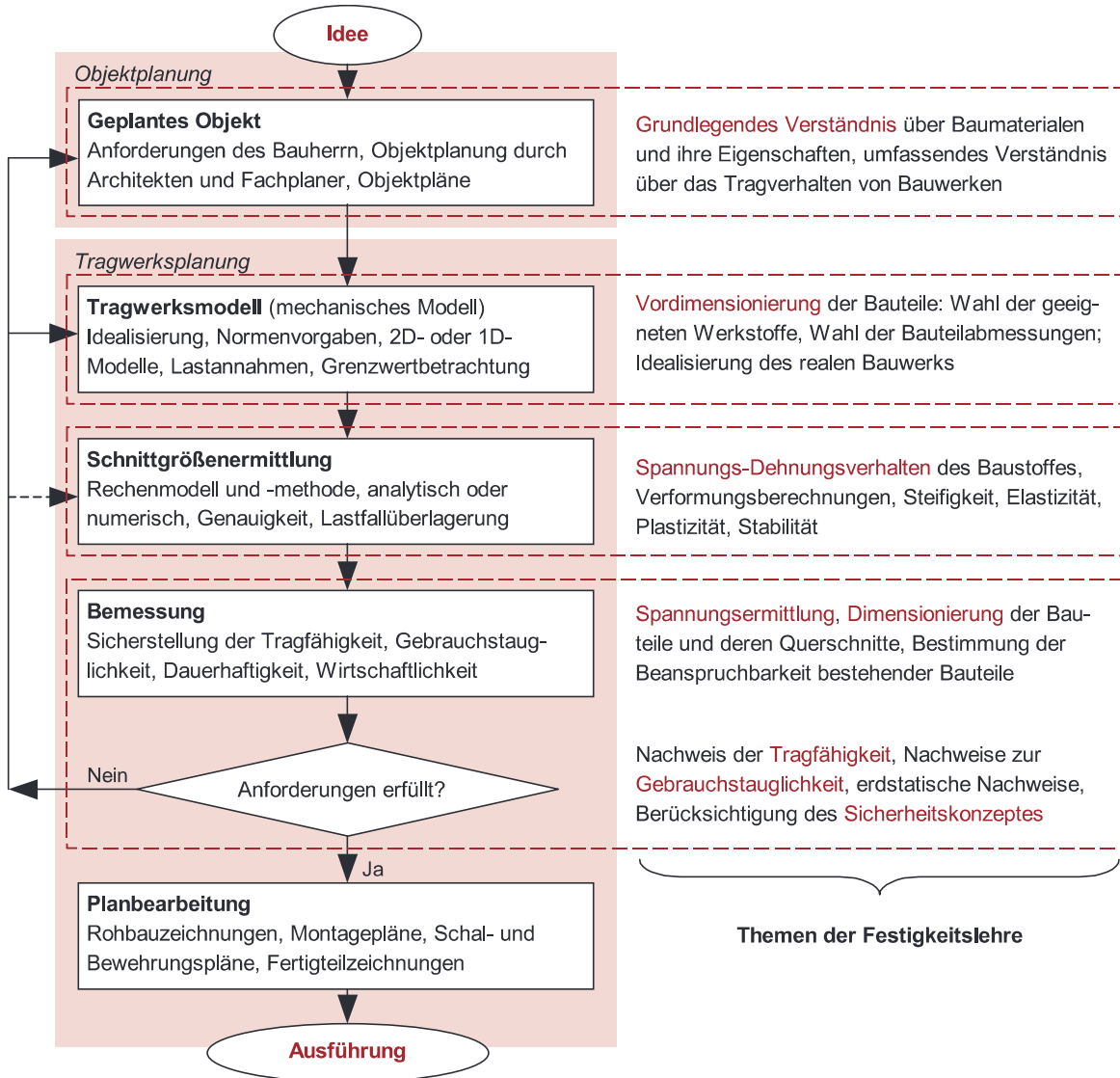
Studierende, die sich erstmalig mit der Festigkeitslehre befassen, müssen Grundkenntnisse in der Baustofflehre und der Mathematik besitzen. Sie sollten wissen, was Schnittgrößen sind und wie man sie an einfachen Tragsystemen ermittelt.



**Bild 1.1** „So etwas sollte vermieden werden!“ – Tacoma-Narrows-Bridge, 1940.

Unter einem **Tragwerk** versteht man die planmäßige Anordnung miteinander verbundener tragender und aussteifender Bauteile (z. B. Fundamente, Stützen, Decken oder Wände), die so entworfen sind, dass sie ein bestimmtes Maß an Beanspruchbarkeit (Tragwiderstand) aufweisen.

metrie des Tragwerks sowie der Abmessungen und des Zusammenwirkens seiner Bauteile getroffen werden. Das dabei entstehende **Tragwerksmodell** ist die Grundlage der statischen Berechnung und anschließenden Bemessung und verlangt den Tragwerksplanern – neben praktischen Erfahrungen – fundierte Kenntnisse der Festigkeitslehre ab.



**Bild 1.2** Bedeutung der Festigkeitslehre während des Planungsprozesses

Bei der statischen Berechnung werden **Auflagerreaktionen** und **Schnittgrößen** ermittelt. Bei statisch bestimmten Tragsystemen reichen die allgemeinen Gleichgewichtsbedingungen aus, um die Schnittgrößen in jedem Punkt des Systems zu bestimmen. Dabei wird das Tragwerk als starres System betrachtet. Diese Idealisierung muss bei statisch unbestimmten Tragsystemen aufgegeben werden. Die Schnittgrößen können in diesem Fall nur dann korrekt ermittelt werden, wenn das Verformungsverhalten des Tragwerks zutreffend beschrieben werden kann. Dazu müssen Statiker die genauen Abmessungen der Tragwerksteile und die maßgebenden Werkstoffparameter kennen und der statischen Berechnung zugrunde legen.

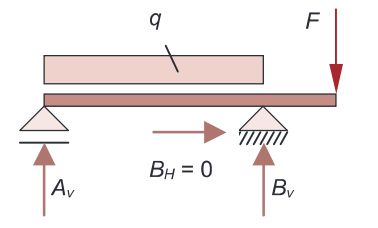
Die Schnittgrößen allein lassen jedoch keine Aussage über die **Beanspruchbarkeit** (Tragwiderstand) des Bauteils oder des Tragwerks insgesamt zu. So wird ein typischer Holzsparren bei einer anderen Beanspruchung versagen als ein Doppel-T-Träger aus hochwertigem Stahl. Im Zuge der Bemessung muss also in jedem Ort des Tragwerks geprüft werden, ob die Beanspruchungen sicher und schadensfrei aufgenommen werden können. Es wird der **Nachweis der Tragfähigkeit** geführt.

Neben den Beanspruchungen sind die **Verformungen** (Deformationen) von großer praktischer Bedeutung. Ein Tragwerk und seine Bauteile sind zwar feste, aber keine starren Gebilde. Man spricht allgemein von deformierbaren Körpern. Manchmal wird im Zusammenhang mit der Festigkeitslehre auch von der „Statik deformierbarer Körper“ gesprochen. Reagiert der Körper aufgrund seiner Werkstoffeigenschaften elastisch (wie z. B. eine Uhrfeder), so wird die Festigkeitslehre auch mit dem Begriff „**Elastostatik**“ gleichgesetzt. Die Tragwerksplaner haben somit auch den Nachweis zu führen, dass die Verformungen bestimmte, durch Bau Normen oder Bauherren vorgegebene Grenzwerte nicht überschreiten. Es wird auf diese Weise sichergestellt, dass die **Gebrauchstauglichkeit** gegeben ist.

Größere Verformungen können darüber hinaus das Tragverhalten eines stabilitätsgefährdeten Tragwerks nachteilig beeinflussen und die **Tragsicherheit** herabsetzen. In einem solchen Fall müssen die Schnittgrößen nicht mehr am unverformten, sondern am verformten System neu ermittelt und die Bemessung entsprechend angepasst werden.

Werden die Anforderungen an die **Tragfähigkeit** und die **Gebrauchstauglichkeit** im ersten Ansatz des Planungsprozesses nicht erfüllt, so sind gegebenenfalls Konstruktionsänderungen (z. B. bei den Bauteilabmessungen oder Werkstoffparametern) vorzunehmen (*Bild 1.2*). In manchen Fällen gelingt es, durch Verfeinerungen am Tragwerksmodell oder durch Auswahl eines genaueren Berechnungsverfahrens bei der Schnittgrößenermittlung, die Bemessung erfolgreich abzuschließen und damit alle Vorgaben für die Planbearbeitung bereitzustellen.

**Aufgabe 1.1:** Die Schnittgrößen eines vertikal belasteten Trägers lassen sich mithilfe der Gleichgewichtsbedingungen  $\Sigma V = 0$  und  $\Sigma M = 0$  ermitteln. Stimmt das wirklich? Wenn ja, unter welchen Bedingungen?



1

Die **Tragfähigkeit** ist die Fähigkeit des Tragwerks und seiner tragenden Teile, allen auftretenden Einwirkungen zu widerstehen, denen es während der Errichtungs- und Nutzungsdauer planmäßig standhalten soll.

Die **Gebrauchstauglichkeit** ist die Fähigkeit des Tragwerks und seiner Bestandteile, die planmäßige Nutzung entsprechend festgelegter Bedingungen zu ermöglichen.

**Fassen wir zusammen:** Die Festigkeitslehre vermittelt wichtige Kenntnisse zur Bewältigung der oben geschilderten Aufgaben. Sie beschäftigt sich mit deformierbaren, festen Körpern mit dem Ziel, ein Versagen eines beanspruchten Systems und seiner Teile durch Bruch, zu große Verformungen oder Instabilität zu vermeiden.

## 1.2 Modellbildung

Ausgangspunkt für jeden Planungs- und Konstruktionsprozess ist das **Tragwerksmodell**. Es ist die gedankliche Umsetzung des realen Bauwerks in ein berechenbares Modell, für das Annahmen getroffen werden im Hinblick auf

Das Erstellen eines Tragwerksmodells ist eine der entscheidenden und anspruchsvollen Aufgaben der konstruktiv gestaltenden Ingenieure. Die Meinung, auch diese Aufgabe dem Computer alleine zu überlassen, führt in die Irre.

- einwirkende Lasten bzw. Lastkombinationen,
- das statische System und dessen Auflagerbedingungen,
- das Tragverhalten
- und das Werkstoffverhalten.

Auch wenn es heute computergestützte Rechenmethoden gibt, mit denen die stets dreidimensionalen Bauteile auch als dreidimensionale Körpermodelle aufwändig berechnet werden können, so werden in der Tragwerksplanung überwiegend zwei- und eindimensionale Tragwerksmodelle (2D- bzw. 1D-Modelle) gewählt. Mit ihnen lässt sich bei vertretbarem Aufwand eine gute Abbildung der Wirklichkeit darstellen. In *Bild 1.3* werden typische Tragwerksmodelle gezeigt. Sie zeichnen sich durch einen einfachen geometrischen Aufbau aus.

Für besonders massive oder dickwandige Tragwerke, deren Abmessungen in allen drei Dimensionen vergleichbare Größenordnungen erreichen, sind aufwändige Körpermodelle notwendig. Für flächige Tragwerke, bei denen die Längenabmessungen die Dicke weit übersteigen, werden zweidimensionale Modelle mit geringer Wandstärke eingesetzt. Typische **Flächentragwerke** sind Platten, Scheiben und Faltwerke sowie – in gekrümmter Form – die Schalen. Für diese Modelltypen werden wegen der geringen Wandstärke Näherungsvoraussetzungen getroffen. Sie ermöglichen eine sinnvoll vereinfachte, aber dennoch ausreichend genaue Berechnung sowie eine anschauliche Ergebnisinterpretation.

Bei der Einführung in die Grundlagen der Festigkeitslehre werden vorzugsweise eindimensionale Tragwerksmodelle behandelt wie

- der Zug- bzw. Druckstab,
- der Biegebalken,
- der Torsionsstab
- und der Knickstab.

Eindimensionale Tragwerksmodelle, bei denen die Längenausdehnung die Querabmessungen um ein Vielfaches übertrifft, werden auch als **Linientragwerke** bezeichnet. Typische Modelltypen sind in dieser Gruppe die Stabtragwerke (Druck- oder Zugstab, Biegeträger, Torsionsstab). Bei komplexeren Tragwerken müssen die vorgestellten Modelle kombiniert werden. Ein Beispiel ist der Rahmen, der sich aus biegebeanspruchten Riegeln und

Stützen zusammensetzt. Durch die Dimensionsreduktion bei 2D- bzw. 1D-Modellen entstehen die spezifischen Scheiben-, oder Plattentheorien bzw. Stab- und Balkentheorien, die in der Statik näher behandelt werden. Durch diese Reduktion wird das Tragverhalten durch charakterisierende Begriffe wie **Dehnung**, **Biegung**, **Torsion**, **Schub**, **Verwölbung** oder **Knicken** beschreibbar.

**Fassen wir zusammen:** Tragwerksplaner müssen Tragwerksmodelle entwickeln, um die Realität berechnen zu machen. Dabei sind Annahmen zu treffen und Vereinfachungen in Kauf zu nehmen. Typische Tragwerksmodelle sind Flächen- und Stabmodelle. Die Analyse des Tragverhaltens dieser Modelle erfolgt heute mithilfe des Computers.

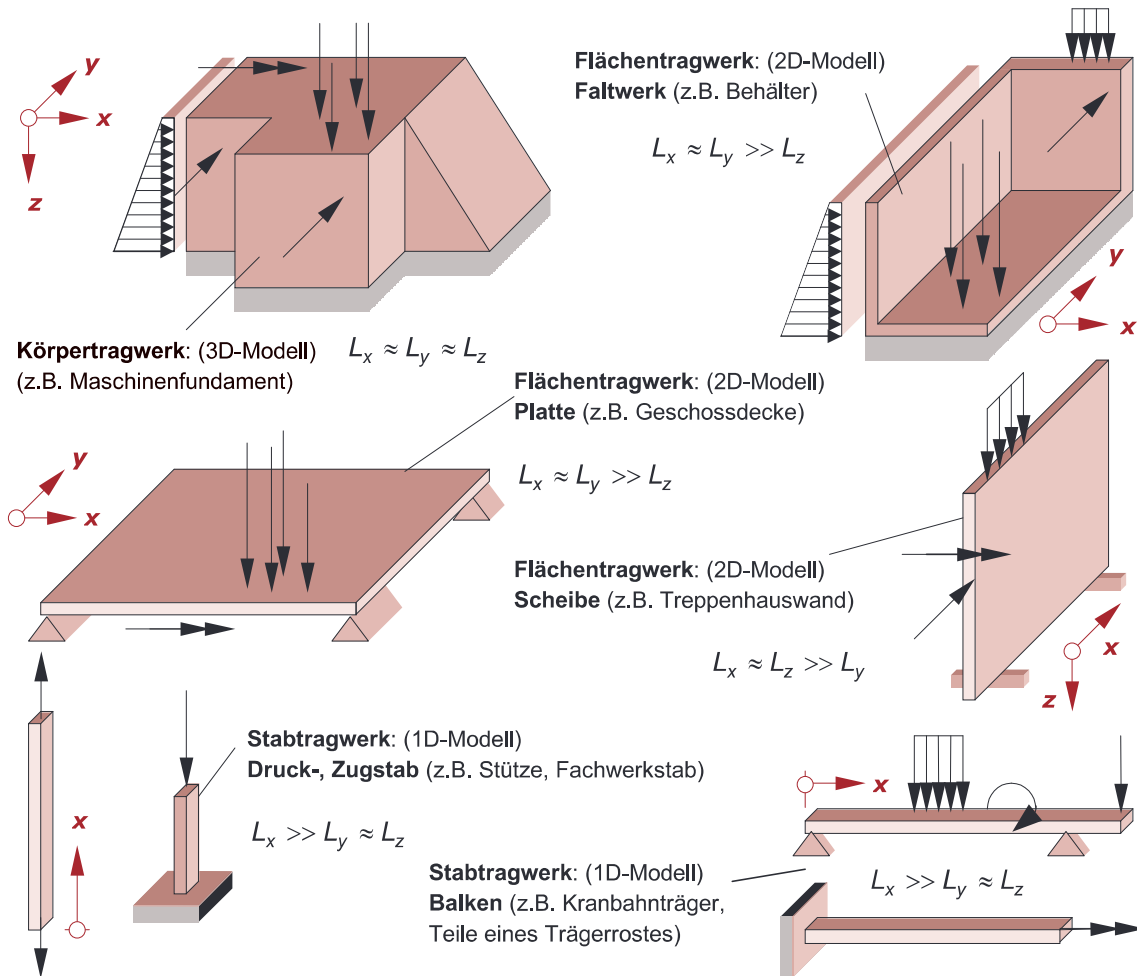


Bild 1.3 Typische Tragwerksmodelle

### 1.3 Einwirkungen, Beanspruchungen

Aus der Statik ist der Begriff **Einwirkung** bekannt. Es handelt sich hierbei meist um eine auf das Tragwerk einwirkende Last (Kraftgröße), die auch als **direkte** Einwirkung bezeichnet wird. Daneben gibt es **indirekte** Einwirkungen, die dem Tragwerk eine Verformung (Verdrehung oder Verschiebung) aufzwingen (Bild 1.4).

Typische indirekte Einwirkungen sind Temperaturänderungen, Temperaturdifferenzen zwischen Unter- und Oberseite eines Bauteils oder ungleiche Setzungen an den Auflagern. Bei statisch unbestimmten Tragsystemen entstehen aufgrund der Verformungsbehinderungen so genannte **Zwangsschnittgrößen**, die mit der gleichen Wertigkeit wie die Schnittgrößen aus direkt einwirkenden Lasten behandelt werden müssen. Bild 1.4 zeigt – nach der Ursache unterteilt – verschiedene Einwirkungen.

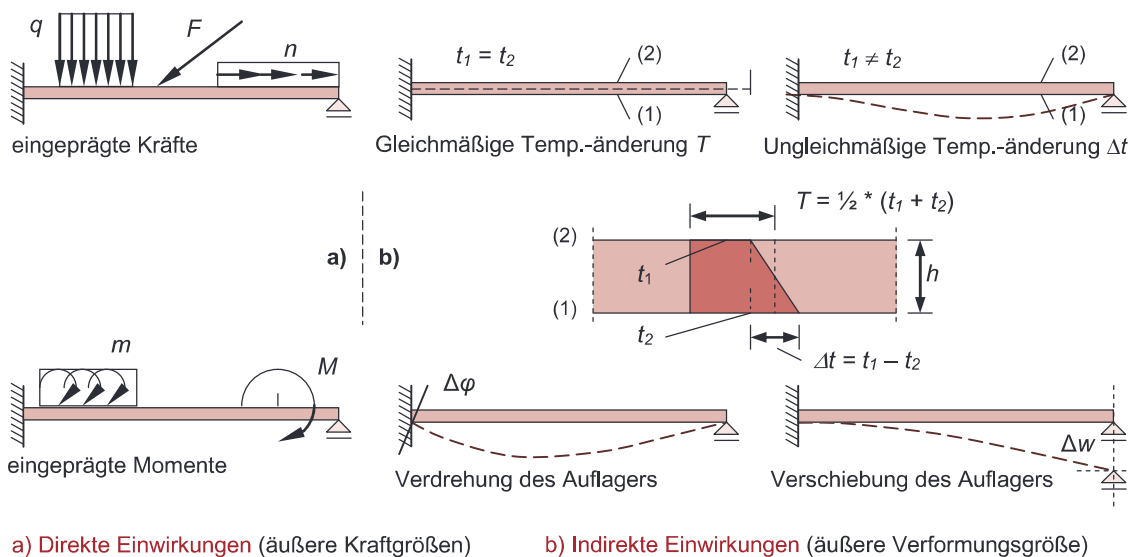


Bild 1.4 Ursachen für verschiedene Einwirkungen

Als indirekte Einwirkungen werden auch das Kriechen (Formänderung des Materials mit dem Ziel, sich einer dauerhaft wirkenden Beanspruchung zu entziehen) und das Schwinden (Schrumpfung durch Austrocknung) angesehen.

Bei Einwirkungen unterscheidet man neben der Ursache auch nach der Art der Wirkung. So ist eine **vorwiegend ruhende Einwirkung** eine Einwirkung, die keine (wesentlichen) Beschleunigungen des Tragwerks oder des Bauteils hervorruft. Typische Einwirkungen dieser Art sind:

- ständige oder zeitlich unveränderliche Einwirkungen wie Eigengewicht, Erddruck oder Vorspannung,

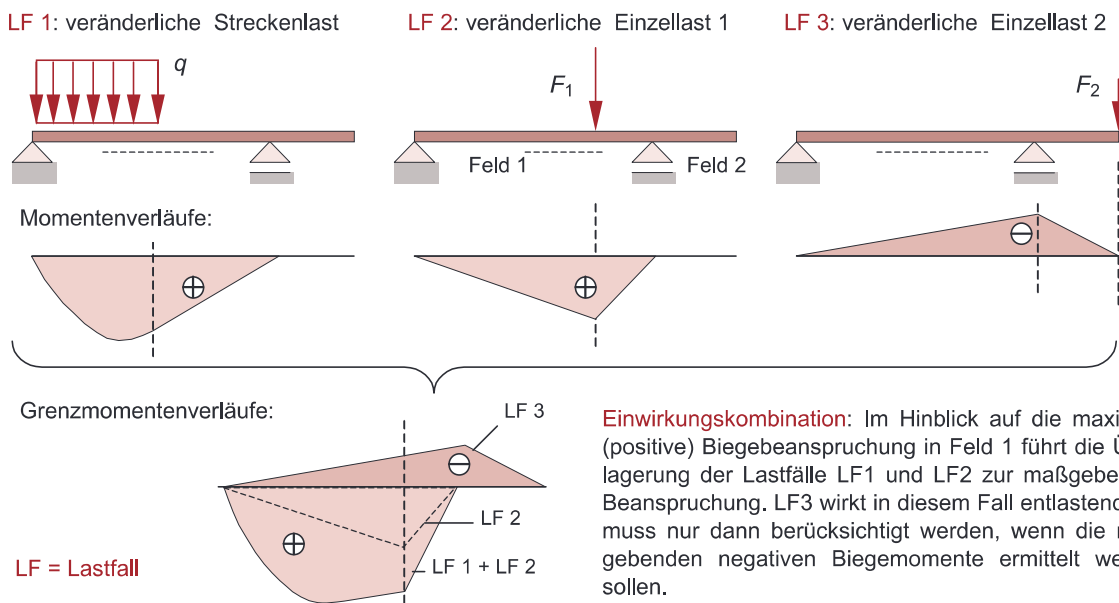
- zeitlich veränderliche Einwirkungen wie Nutzlasten aus Verkehr und Lagerung, Schnee- oder Windlasten. Obwohl zeitlich veränderlich, so werden diese Einwirkungen für die Tragwerksplanung dennoch als vorwiegend ruhende Einwirkungen angesehen.

Bei **dynamischen Einwirkungen** handelt es sich um stoßende oder sich häufig wiederholende Belastungen, die wesentliche Beschleunigungen hervorrufen wie z.B. Kranbahnlasten.

Eine Einwirkung kann allein oder gleichzeitig in Kombination mit anderen, von ihr unabhängigen Einwirkungen auftreten. Man spricht dann von einer **Einwirkungskombination**. Als Folge der gleichzeitig zu betrachtenden Einwirkungen bzw. einer Einwirkungskombination ergibt sich die **Beanspruchung** des Tragwerks oder seiner Teile oder die Beanspruchung an einem betrachteten Ort (Querschnitt) des Tragwerks.

Ein für die Bemessung maßgebender Wert einer Beanspruchung lässt sich mithilfe der ungünstigsten Einwirkungskombination bestimmen. Diese muss den Kombinationsregeln der einschlägigen Baunormen gehorchen. In *Bild 1.5* wird dieser Hergang exemplarisch an einem Biegeträger gezeigt, allerdings ohne auf weiterführende Regeln des **Sicherheitskonzepts** nach DIN EN 1990:2012-12 im Hinblick auf die Bemessung einzugehen.

**Aufgabe 1.2:** Wie müssen die Lastfälle in *Bild 1.5* kombiniert werden, um die maßgebende Auflagerkraft des rechten Lagers zu erhalten?



**Bild 1.5** Ermittlung der maßgebenden Beanspruchung durch Lastfallkombinationen

## 1.4 Schnittgrößen, Spannungen

Ein Maß für die Beanspruchung auf der Ebene des Tragwerkmodells sind die **Schnittgrößen**. Bei Stabtragwerken sind es im allgemeinen Fall die Längs- oder Normalkraft  $N$ , die Querkräfte  $V_y$  und  $V_z$  sowie das Torsionsmoment  $M_x$  um die Längsachse des Stabes und die beiden Biegemomente  $M_y$  und  $M_z$  (vgl. Bild 1.6). Wirkt eine besondere Belastung in einer Ebene bzw. in einer Richtung, so ergeben sich bestimmte Schnittgrößen zu null.

**Aufgabe 1.3:** In Bild 1.3 sind einige Stabtragwerke (also 1D-Modelle) unter besonderen Beanspruchungen dargestellt. Welche Schnittgrößen ergeben sich bei diesen Systemen zu null und müssen nicht weiter beachtet werden?

Die Festlegung, was positive oder negative Schnittgrößen sind, erfolgt mithilfe eines am Tragwerk ausgerichteten **Koordinatensystems** und der Positivdefinition der Schnittufer. Schnittgrößen sind dann positiv, wenn sie am positiven Schnittufer im positiven Sinne des Koordinatensystems wirken. Das positive Schnittufer einer Schnittstelle ist jenes, welches man vom Ursprung ausgehend zuerst erreicht. Die Einführung von Schnittstellen ist eine Methode der Statik (**Schnittprinzip**), um Beanspruchungen an einer beliebigen Stelle des Tragwerkmodells „sichtbar“ und damit berechenbar zu machen.

Alle Schnittgrößen beziehen sich bei Stabtragwerken auf die **Stabachse**, die eine Idealisierung des dreidimensionalen Bauteils darstellt. Die Schnittgrößen werden auch als innere Kräfte bezeichnet und stehen mit den äußeren Kräften (einwirkende Lasten und Auflagerreaktionen) im **Gleichgewicht**. Sie wirken auf die gesamte Schnittfläche und verteilen sich nach mechanischen Gesetzmäßigkeiten in Abhängigkeit von der Querschnittsgeometrie und den Werkstoffparametern.

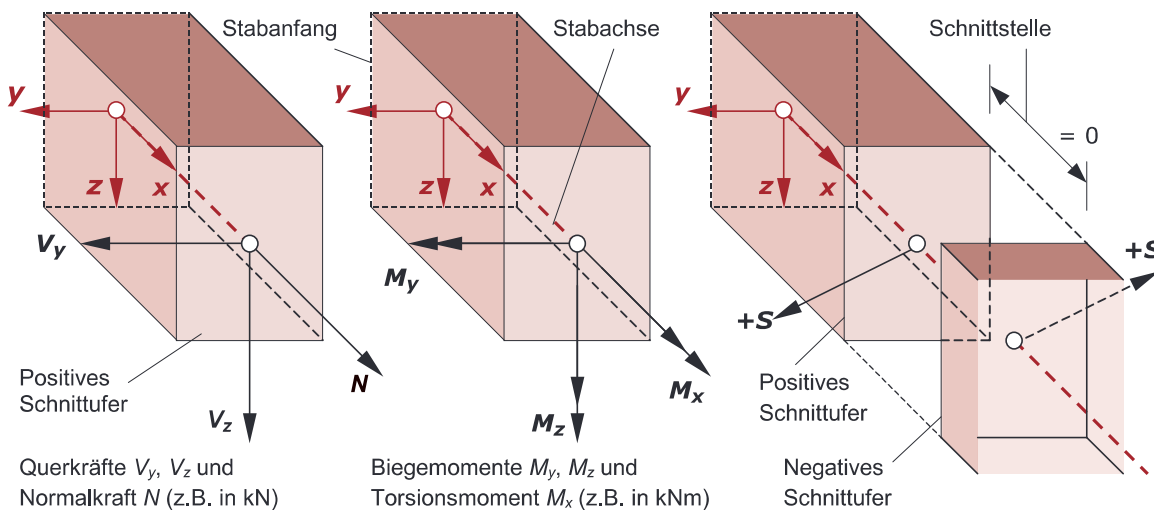


Bild 1.6 Definition positiver Schnittgrößen am Stabtragwerk



Der je Flächeneinheit wirkende Kraftanteil dieser Schnittgrößen wird als **Spannung** bezeichnet und ist ein Maß für die Beanspruchung im Körperinneren des (realen) Tragwerks.

$$\text{Spannung} = \frac{\text{Kraftanteil}}{\text{Flächeneinheit}} \left( \frac{\text{kN}}{\text{cm}^2}; \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}; \frac{\text{MN}}{\text{m}^2} \right)$$

Die Flächeneinheit kann sich aus einer endlichen Querschnittsfläche, einer Teilfläche im Schnitt oder aus einer infinitesimal kleinen Schnittfläche bilden. Mathematisch korrekt wird deshalb die Spannung als Differentialquotient aus innerer Kraft  $dF$  und zugehöriger Fläche  $dA$  beschrieben; es gilt:

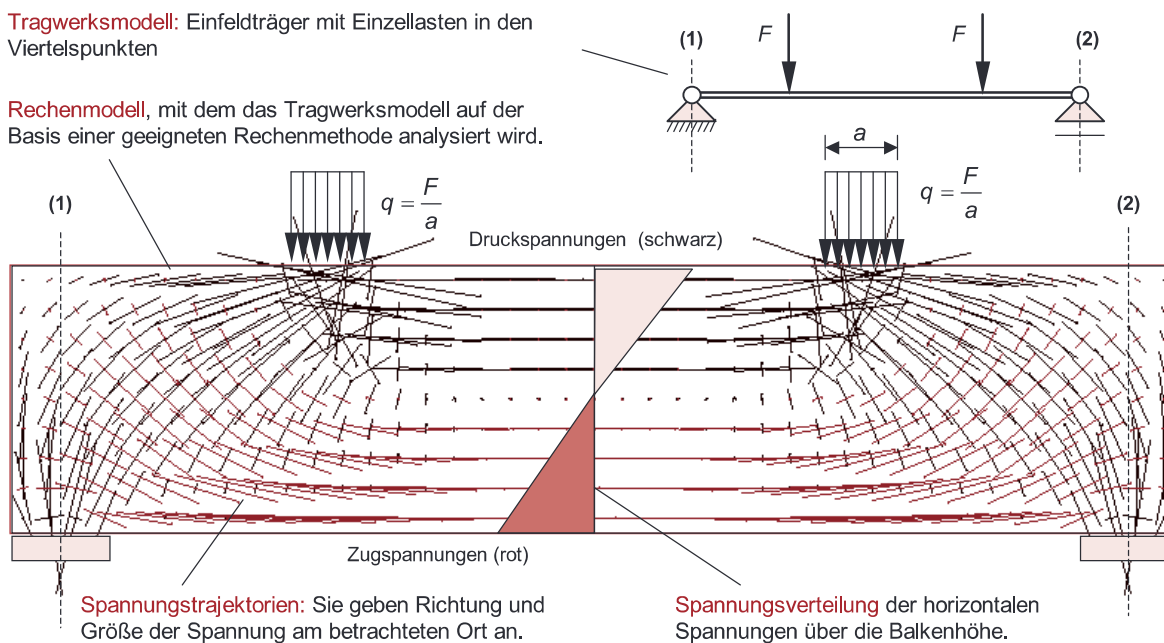
$$\text{Spannung} = \frac{dF}{dA}$$

Die Spannung ist ebenso wie die Kraft ein Vektor. Sie ist eindeutig durch die Wirkungslinie, den Betrag und ihren Richtungssinn definiert. Stellt man derartige Spannungsvektoren für verschiedene Schnitte und Querschnittspunkte zeichnerisch zusammen, so wird der innere Kraftfluss in einem Tragwerk deutlich. *Bild 1.7* zeigt einen solchen Zustand für einen durch zwei Einzellasten beanspruchten Einfeldträger.

Spannungen mit positivem Vorzeichen nennt man Zugspannungen. Sie dehnen das Material. Negative Spannungen sind Druckspannungen, die das Material zusammenpressen.

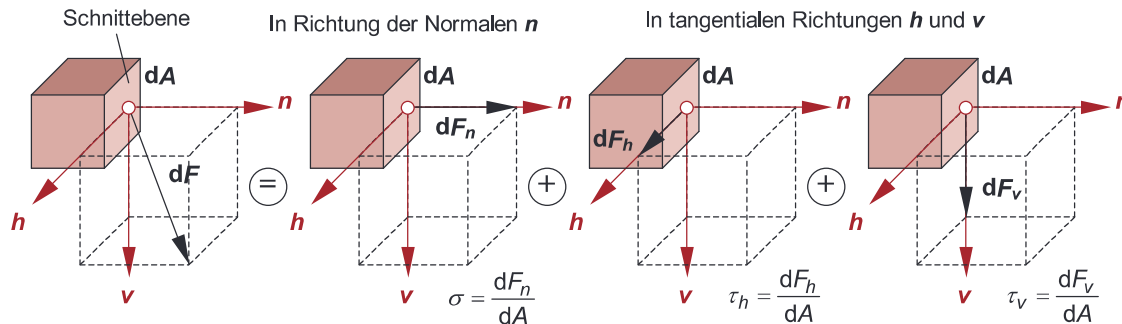
**Tragwerksmodell:** Einfeldträger mit Einzellasten in den Viertelpunkten

**Rechenmodell,** mit dem das Tragwerksmodell auf der Basis einer geeigneten Rechenmethode analysiert wird.



**Bild 1.7** Innerer Kraftfluss in einem Einfeldträger unter Querkraftbiegung, berechnet mit einem Scheibenmodell

Für die weitere Betrachtung der Spannungen ist es üblich, den Spannungsvektor in seine Komponenten zu zerlegen. Die Komponente, die senkrecht (normal) zur Schnittfläche steht, wird als **Normalspannung**  $\sigma$ , die in der Schnittfläche liegende Komponente als **Tangentialspannung**  $\tau$  (auch als Schubspannung oder Scherspannung) bezeichnet (*Bild 1.8*). Die Tangentialspannung  $\tau$  wird darüber hinaus in zwei senkrecht zueinander stehende Komponenten  $\tau_v$  und  $\tau_h$  zerlegt, wenn das Bezugskordinatensystem dieses erfordert.

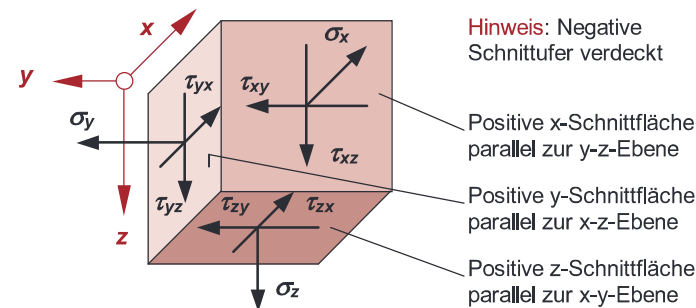


**Bild 1.8** Zerlegung des Spannungsvektors in drei orthogonale Spannungskomponenten

Wird aus einem allgemein beanspruchten Körper ein Würfel mit infinitesimalem Volumen und beliebiger Raumorientierung herausgeschnitten, so ergeben sich in jeder Schnittfläche eine **Normalspannung** und zwei **Tangentialspannungen**. Zur Unterscheidung ihrer Wirkungsrichtung erhalten die Normalspannungen die Richtungsindizes  $x$ ,  $y$  und  $z$ .

Die Tangentialspannungen werden, da sie paarweise pro Schnittfläche vorliegen, doppelt indiziert. Der 1. Index gibt die Richtung der Flächennormalen, der 2. Index die Richtung der jeweiligen  $\tau$ -Spannung an (*Bild 1.9*).

**Aufgabe 1.4:** Durch die perspektivische Darstellung in *Bild 1.9* sind die negativen Schnittufer nicht zu sehen. Stellen Sie alle neun positiven Spannungskomponenten an allen negativen Schnittufern in einer eigenen Skizze dar.



**Bild 1.9** Positive Spannungskomponenten am Volumenelement

Die Festlegung der Vorzeichendefinition ergibt sich aus der Lage der Schnittoberfläche in Bezug auf das Koordinatensystem und den Richtungssinn der Spannungsponenten. Spannungen sind dann positiv, wenn sie am positiven Schnittoberfläche in Richtung der positiven Koordinatenachsen des Bezugssystems wirken. Am negativen Schnittoberfläche weisen positive Spannungen in entgegengesetzte Richtungen.

Wie aus Bild 1.9 ersichtlich, ergeben sich insgesamt neun Spannungsponenten. Durch Gleichgewichtsbetrachtungen lässt sich belegen, dass zwei aufeinander zulaufende Tangentialspannungen an benachbarten Schnittoberflächen gleichen Vorzeichens gleich groß sind. Bild 1.10 zeigt dies für die x-z-Ebene. Es gilt generell:

$$\tau_{ij} = \tau_{ji} \tag{1.1}$$

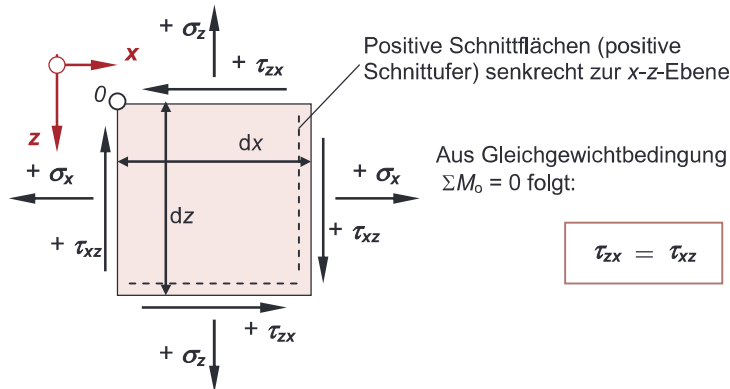


Bild 1.10 Gleichheit zugeordneter Tangentialspannungen

Ein allgemeiner dreiachsiger (räumlicher) Spannungszustand lässt sich somit durch sechs voneinander unabhängige Spannungsponenten beschreiben:

$$\vec{\sigma} = [\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{zx}]^T \tag{1.2}$$

Sind in besonderen Fällen zwei gegenüberliegende Schnittoberflächen spannungsfrei (Bild 1.11), so spricht man von einem zweiachsigen (ebenen) Spannungszustand. Ein solcher Spannungszustand ist typisch für eine Scheibe, die nur in ihrer Ebene Lasten aufzunehmen hat. Quer zur Scheibenebene wirken weder Lasten, noch liegen hier Verformungsbehinderungen vor. Ein einachsiger Spannungszustand ist typisch für einen Stab unter einer Zug- oder Druckbeanspruchung. Hier tritt nur in der Schnittfläche normal zur Stabachse eine von null verschiedene  $\sigma$ -Spannung auf (Bild 1.11). Gleiches trifft auch für einen Balken unter reiner Biegung zu.

Durch die Verwendung der Buchstaben  $\sigma$  und  $\tau$  wird der Eindruck erweckt, als ob es sich um verschiedenartige Spannungen handelt. Normal- und Tangentialspannungen sind gleichartige Komponenten einer resultierenden Spannung. Die Zerlegung in  $\sigma$ - und  $\tau$ -Spannungen ist lediglich eine Frage der Schnittführung.

In Abschn. 7.2 werden die Spannungen ein weiteres Mal eine besondere Rolle spielen. Wir werden die Spannungen unter anderen Schnittwinkeln betrachten und auf andere Bezugskordinatensysteme transformieren. Dabei werden wir auch die sogenannten Hauptspannungen kennen lernen.

**Aufgabe 1.5:** In Bild 1.7 ist der innere Kraftfluss eines Einfeldbalkens unter zwei Einzellasten in den Viertelpunkten dargestellt. Gibt es bei diesem Balken Bereiche, in denen ein einachsiger Spannungszustand vorherrscht?