5 Prinzip der virtuellen Kräfte

5.1 Grundlagen zum Prinzip der virtuellen Kräfte

Das Prinzip der virtuellen Kräfte (PvK) stellt eine Anwendung des Prinzips der virtuellen Arbeit dar. Es dient zur Bestimmung von realen Verformungsgrößen eines Systems, dessen Schnittgrößenverläufe bekannt sind (vgl. [Hir98], [WE97], [WK04], [Din12]). Ist ein System im Gleichgewicht, so ergeben die virtuellen Arbeiten der inneren und äußeren Kräfte in der Summe Null:

$$\delta W = \delta W_{ext} + \delta W_{int} = 0$$

Virtuelle Kraftgrößen – Schnittgrößen, Auflagerreaktionen, äußere Kräfte – verrichten zusammen mit realen Verformungsgrößen – Verschiebungen, Verdrehungen, Krümmungen, Dehnungen – virtuelle Arbeit.

$$\delta W = \delta W_{ext} + \delta W_{int} = \left[\int_{\ell} \delta q \cdot w \, dx + \sum_i \delta F_i \cdot d_i + \sum_j \delta M_j \cdot \phi_j \right] - \left[\int_{\ell} \delta N \cdot \varepsilon \, dx + \int \delta M \cdot \kappa \, dx \right] = 0$$

Die innere virtuelle Arbeit ist grundsätzlich negativ, da innere virtuelle Kraftgrößen den realen Verschiebungsgrößen entgegenwirken. Die Arbeit der äußeren Kräfte ist dagegen grundsätzlich positiv. Die Arbeiten verteilter virtueller Kraftgrößen (virtuelle Linienlast δq, virtuelle Schnittgrößen δN, δM) sind entlang des Balkens zu integrieren. Hierfür können Integraltafeln verwendet werden (siehe Kapitel 14.1). Weitere Anteile der virtuellen inneren Arbeit ergeben sich aus der Arbeit der virtuellen Querkräfte auf den realen Schubverzerrungen. Für dünne Balken können diese Anteile aus Querkräften vernachlässigt werden. Hier und im Weiteren sollen dünne Balken behandelt werden.

Krümmungen und Dehnungen setzen sich im Rahmen dieses Kapitels aus Momenten- bzw. Normalkrafteinflüssen und Temperatureinfluss zusammen.

$$\kappa = \frac{M}{EI} + \alpha_T \cdot \frac{\Delta T}{h}$$

$$\varepsilon = \frac{N}{EA} + \alpha_T \cdot T$$

Zur Begriffs- und Symbolklärung der Formeln wird auf Kapitel 1 verwiesen.

Innere und äußere virtuelle Kraftgrößen können im Grunde beliebig gewählt werden, müssen aber am virtuellen System im Gleichgewicht sein. Für virtuelle Kraftgrößen gelten dieselben Gleichgewichtsbeziehungen wie für reale Kraftgrößen.

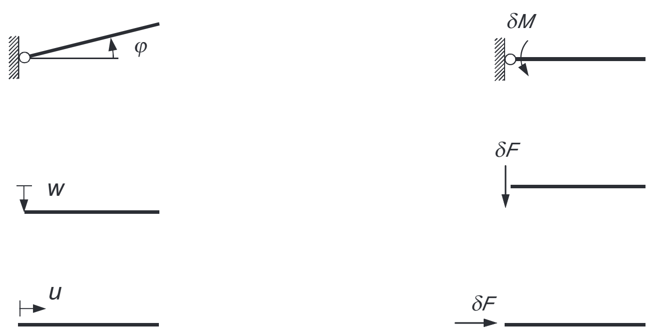
Virtuelle Lagerkräfte sind ebenfalls als äußere virtuelle Kräfte zu behandeln. Mithilfe von zusätzlichen Gelenken können innere (virtuelle) Kraftgrößen ausgelöst und in äußere (virtuelle) Kraftgrößen umgewandelt werden.

Soll eine spezielle Verschiebungsgröße an einem Punkt m des Systems bestimmt werden, so ist am Ort und in Richtung der zu bestimmenden Verschiebungsgröße eine entsprechende virtuelle äußere Kraftgröße anzubringen.

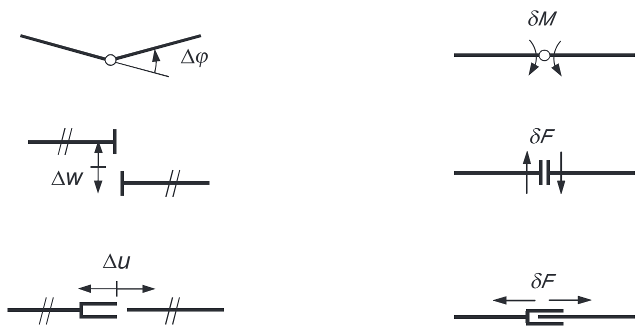
Die virtuelle äußere Kraftgröße wird in der Regel zu $\delta F_m = \overline{1}$ bzw. $\delta M_m = \overline{1}$ angenommen. Der Strich über der Kraftgröße symbolisiert, dass es sich um eine virtuelle Größe handelt.

Im Folgenden sind Beispiele für korrespondierende virtuelle Kraft- und reale Verschiebungsgrößen gegeben.

Reale Verformungsgröße | Virtuelle Kraftgröße

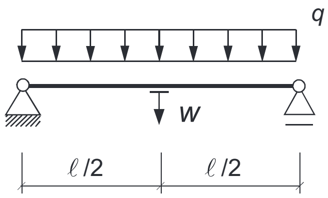


Reale Relativ-Verformung | Virtuelle Kraftgröße

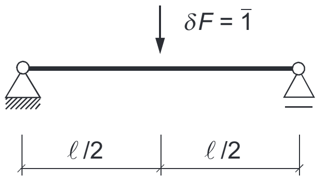


Systematisches Vorgehen zur Bestimmung der Verschiebung *w* in Trägermitte:

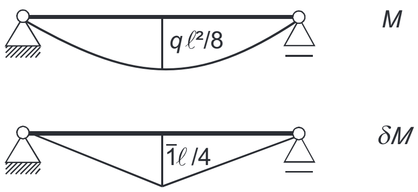
1. Statisches System unter Streckenlast. Gesucht: Durchsenkung *w* in Feldmitte.



2. Aufbringen einer virtuellen Last am Ort und in Richtung der gesuchten Verformung. Das virtuelle System entspricht dem realen System.



3. Berechnung des realen und des virtuellen Momentenverlaufs *M* und *δM*.



4. Anwendung des PvK und Lösen der Unbekannten

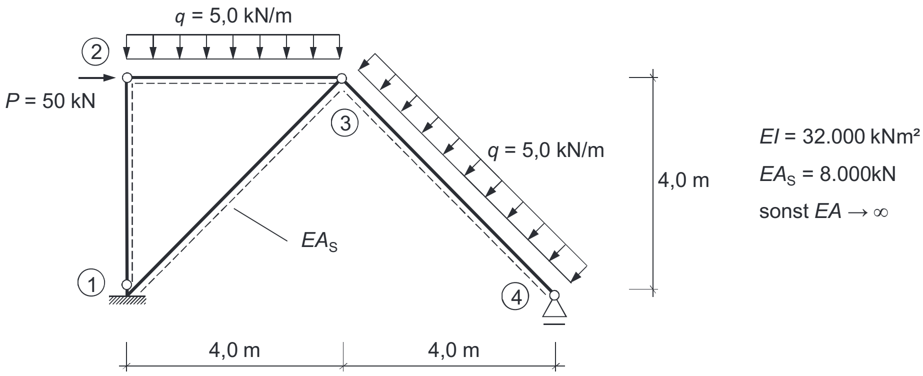
$$\delta W = \delta W_{ext} + \delta W_{int} = \{\delta F \cdot w\} - \left\{\int \delta M \cdot \frac{M}{EI}\, dx\right\} = 0$$

$$\rightarrow \bar{1} \cdot w = 2 \cdot \left(\frac{5}{12} \cdot \frac{\bar{1} \cdot \ell}{4} \cdot \frac{q\ell^2}{8EI} \cdot \frac{\ell}{2} \right)$$

$$\rightarrow w = \frac{5}{384} \frac{q\ell^4}{EI}$$

Die virtuellen Lagerkräfte verrichten keine Arbeit, da die zugeordneten Lagerverschiebungen null sind.

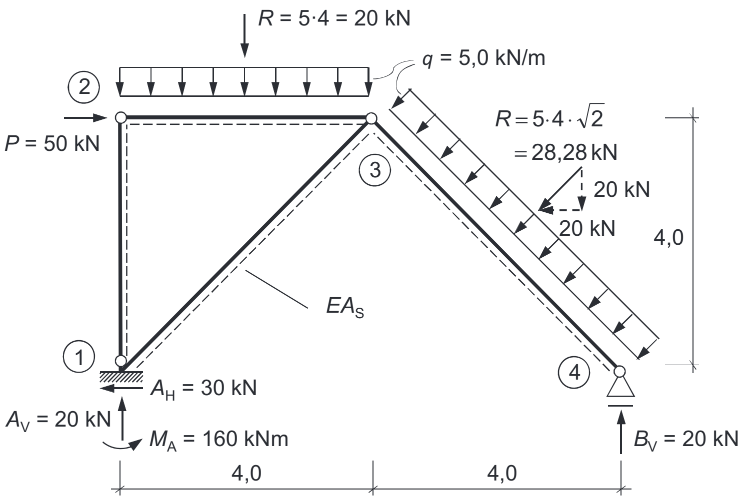
5.2 Beispielaufgabe



1. Berechnen Sie für die gegebene Belastung den Momenten- und Normalkraftverlauf.
2. Berechnen Sie mit dem Prinzip der virtuellen Kräfte (PvK) die Horizontalverschiebung sowie die Verdrehung am Knoten 2.
3. Wie groß muss EA_S mindestens sein, wenn die Horizontalverschiebung am Knoten 2 maximal 4 cm betragen darf?

5.2.1 Schnittgrößen aus gegebener Belastung

Auflagerreaktionen



Berechnung:

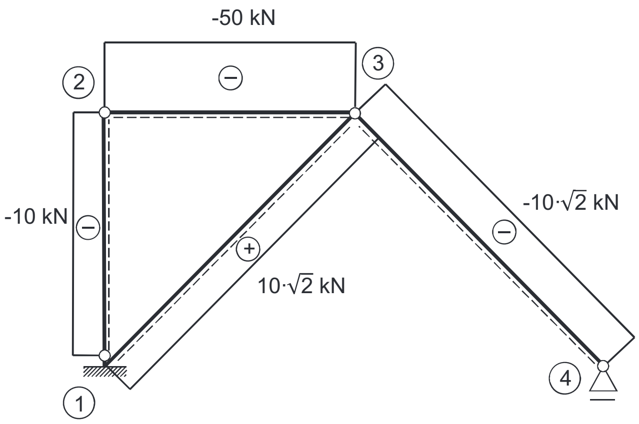
$\sum H_{global}$: $A_H = 50 - 20 = 30$ kN

$\sum M_{3,rechts}$: $B_V = \dfrac{20 \cdot 2 + 20 \cdot 2}{4} = 20$ kN

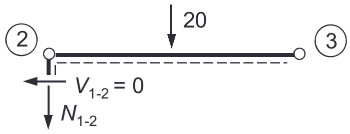
$\sum V_{global}$: $A_V = 20 + 20 - 20 = 20$ kN

$$\sum M_{1,global}: M_A = 50 \cdot 4 + 20 \cdot 2 + 20 \cdot 6 - 20 \cdot 2 - 20 \cdot 8 = 160 \text{ kNm}$$

Normalkraftverlauf

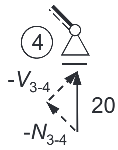


Stab 1-2:
$N = -20 \cdot 2/4 = -10$ kN

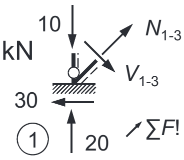


Stab 2-3:
$N = -P = -50$ kN

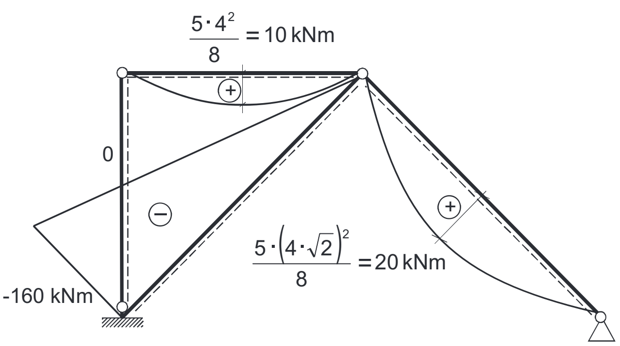
Stab 3-4:
$N = -20/\sqrt{2} = -10 \cdot \sqrt{2}$ kN



Stab 1-3:
$$N = \frac{30}{\sqrt{2}} - \frac{20}{\sqrt{2}} + \frac{10}{\sqrt{2}} = 10 \cdot \sqrt{2} \text{ kN}$$



Momentenverlauf

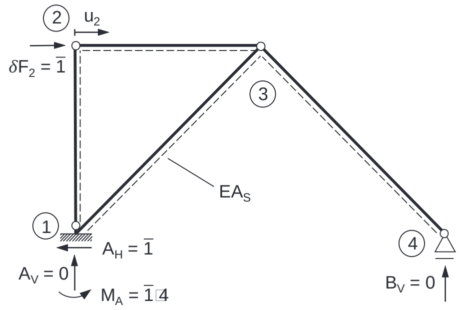


Das Auflagermoment M_A geht komplett in den Stab 1 – 3, da der Stab 1 – 2 mit einem Momentengelenk am Auflager angeschlossen ist. Der Stab 1 – 3 ist unbelastet, somit nimmt das Moment linear bis zum Gelenk in Knoten 3 ab.

5.2.2 Verschiebungen am Knoten 2

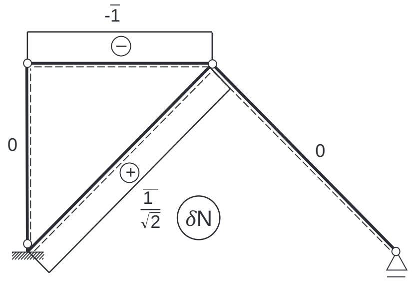
Horizontalverschiebung am Knoten 2

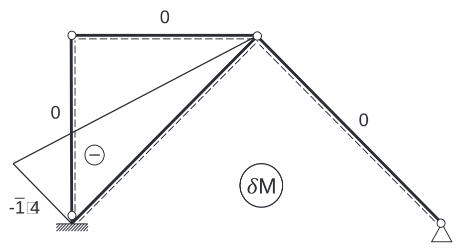
Folgend sind die Schnittgrößen unter der virtuellen Kraft δF_2 dargestellt.



Berechnung:

$\sum H_{global}$:	$A_H = \delta F_2 = \bar{1}$
$\sum M_{3,rechts}$:	$B_V = 0$
$\sum V_{global}$:	$A_V = 0$
$\sum M_{1,global}$:	$M_A = \delta F_2$□$4 = \bar{1}$□4





Virtuelle Arbeit:

Die virtuelle Normalkraft δN verrichtet im Stab 1 – 3 auf der realen Dehnung ε Arbeit, da dieser eine endliche Dehnsteifigkeit EA_S besitzt. Für alle anderen Stäbe gilt aufgrund von $EA \rightarrow \infty$, dass die Dehnungen $\varepsilon = N/EA$ zu Null werden.

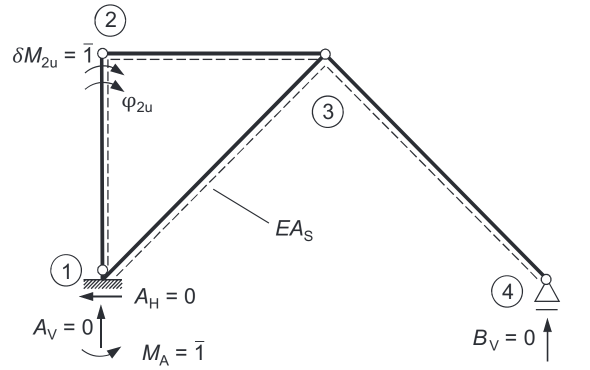
$$\delta W = \delta W_{ext} + \delta W_{int} = u_2 \cdot \delta F_2 + \int \frac{M}{EI} \cdot \delta M \cdot dx + \int \frac{N}{EA} \cdot \delta N \cdot dx = 0$$

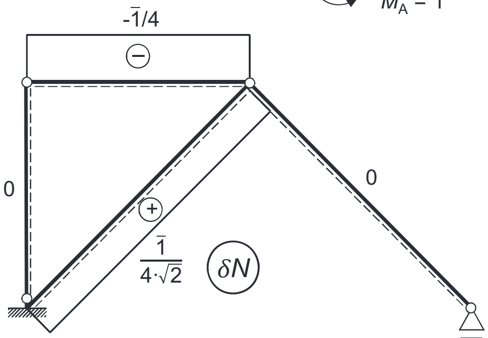
$$u_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{10 \cdot \sqrt{2}}{EA_S} \cdot 4{,}0 \cdot \sqrt{2} + \frac{1}{3} \cdot 4 \cdot \frac{160}{EI} \cdot 4{,}0 \cdot \sqrt{2} = 44{,}783 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{m}$$

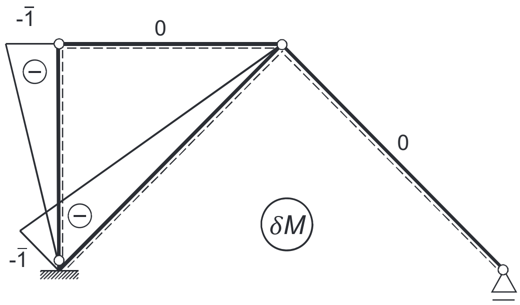
Verdrehung am Knoten 2

Da sich am Knoten 2 ein Gelenk befindet, sind die Endverdrehungen der beiden angeschlossenen Stäbe voneinander unabhängig und können somit separat bestimmt werden. Alternativ könnte die Relativverdrehung der beiden Stäbe an diesem Knoten auch gemeinsam bestimmt werden (hier nicht vorgeführt).

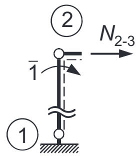
Berechnung von φ_{2u}



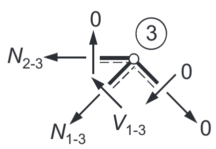




$\sum M_1$: $N_{2\text{-}3} = -\bar{1}/4$



$\swarrow \sum F_3$: $N_{1\text{-}3} = \dfrac{\bar{1}}{4\cdot\sqrt{2}}$



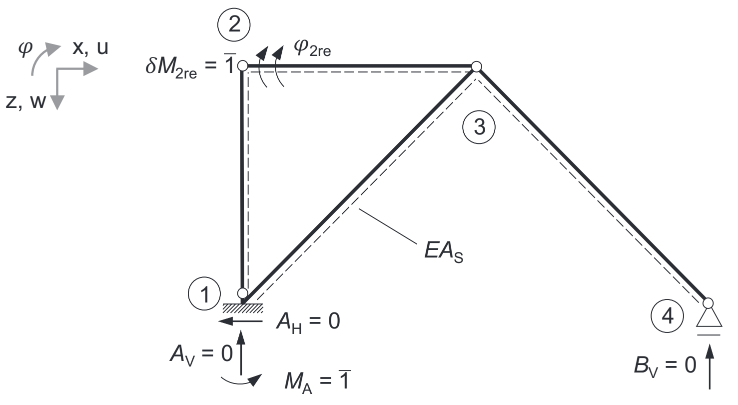
Stab 1–2 und Stab 1–3 werden jeweils an einem Ende mit einem Einzelmoment belastet (δM_{2u} bzw. M_A). Da sie sonst unbelastet sind, nimmt das Moment jeweils bis zu den Gelenken linear ab. Die anderen Stäbe sind unbelastete Pendelstäbe → $M = 0$.

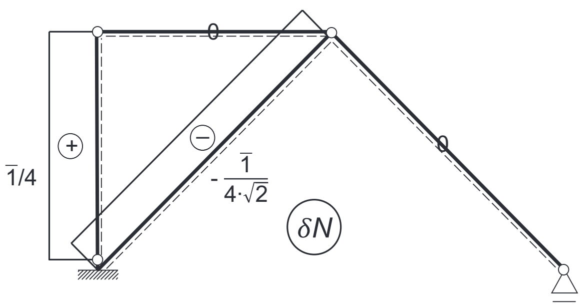
Virtuelle Arbeit:

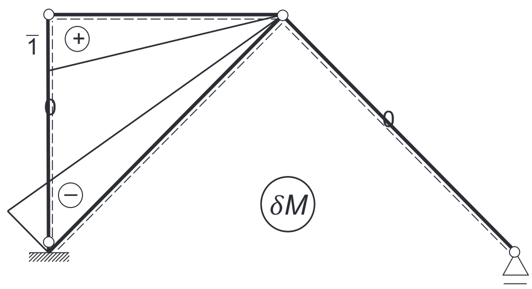
$$\delta W = \delta W_{ext} + \delta W_{int} = \varphi_{2u} \cdot \delta M_{2u} + \int \frac{M}{EI} \cdot \delta M \cdot dx + \int \frac{N}{EA} \cdot \delta N \cdot dx = 0$$

$$\varphi_{2u} \cdot 1 = \frac{1}{4 \cdot \sqrt{2}} \cdot \frac{10 \cdot \sqrt{2}}{EA_S} \cdot 4{,}0 \cdot \sqrt{2} + \frac{1}{3} \cdot 1 \cdot \frac{160}{EI} \cdot 4{,}0 \cdot \sqrt{2} = 0{,}0112 \text{ [rad]}$$

Berechnung von φ_{2re}



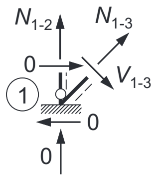




Der Momentenverlauf ergibt sich analog zu dem Verlauf aus δM_{2u}.

$$\sum M_{3,\text{links}}: N_{1\text{-}2} = \bar{1}/4$$

$$\nearrow \sum F_1: N_{1\text{-}3} = -\frac{\bar{1}}{4\cdot\sqrt{2}}$$



Virtuelle Arbeit:

$$\delta W = \delta W_e + \delta W_i = \varphi_{re} \cdot \delta M_{2re} + \int \frac{M}{EI} \cdot \delta M \cdot dx + \int \frac{N}{EA} \cdot \delta N \cdot dx = 0$$

$$\varphi_{2re} \cdot 1 = -\frac{1}{4\cdot\sqrt{2}} \cdot \frac{10\cdot\sqrt{2}}{EA_S} \cdot 4{,}0 \cdot \sqrt{2} + \frac{1}{3} \cdot 1 \cdot \frac{160}{EI} \cdot 4{,}0 \cdot \sqrt{2} + \frac{1}{3} \cdot 1 \cdot \frac{10}{EI} \cdot 4{,}0 = 8{,}077 \cdot 10^{-3} \text{ [rad]}$$

5.2.3 Horizontalverschiebung am Knoten 2 maximal 4,0 cm

Unter Verwendung der Berechnungen aus Teilaufgabe b)

$$\delta W = \delta W_{ext} + \delta W_{int} = u_2 \cdot \delta F_2 + \int \frac{M}{EI} \cdot \delta M \cdot dx + \int \frac{N}{EA} \cdot \delta N \cdot dx = 0$$

$$u_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{10\cdot\sqrt{2}}{EA_S} \cdot 4{,}0 \cdot \sqrt{2} + \frac{1}{3} \cdot 4 \cdot \frac{160}{32.000} \cdot 4{,}0 \cdot \sqrt{2} \le 4cm$$

Formel umstellen und nach EA_S auflösen:

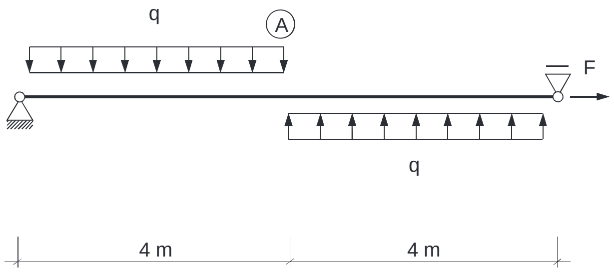
$$\frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{10\cdot\sqrt{2}}{EA_S} \cdot 4{,}0 \cdot \sqrt{2} \le 0{,}04\ m - \frac{1}{3} \cdot 4 \cdot \frac{160}{32.000} \cdot 4{,}0 \cdot \sqrt{2}$$

$$EA_S \ge \frac{10\cdot\sqrt{2}\cdot 4{,}0}{0{,}04\ m - \frac{1}{3} \cdot 4 \cdot \frac{160}{32.000} \cdot 4{,}0 \cdot \sqrt{2}} = 24728\ kN$$

Somit ergibt sich bei der Forderung nach einer maximalen horizontalen Verschiebung am Knoten 2 von u_2 = 4,0 cm ein EA_S von mindestens 24 728 kN.

Aufgabe 5

Schwierigkeitsgrad
einfach



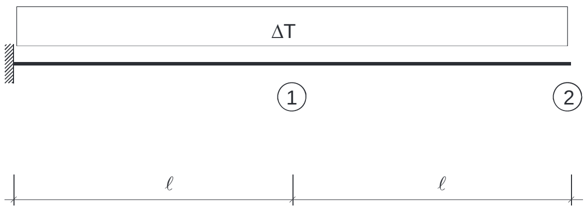
gegeben:
F = 20 kN
q = 5 kN/m
EI = 20.000 kNm²
EA = 150.000 kN

a) Berechnen Sie für die gegebene Belastung den Momenten-, Querkraft- und Normalkraftverlauf.

b) Bestimmen Sie mithilfe des Prinzips der virtuellen Kräfte alle Verschiebungen sowie die Verdrehung am Knoten A.

Aufgabe 6

Schwierigkeitsgrad
einfach

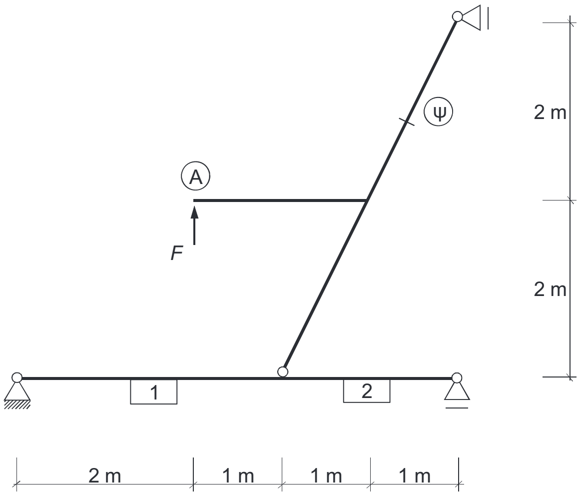


gegeben:
ΔT = 20 K
ℓ = 10 m
EI = 40.000 kNm²
EA = 100.000 kN
$\alpha_T = 4 * 10^{-5}$ 1/K
h = 0,5 m

a) Bestimmen Sie mithilfe des Prinzips der virtuellen Kräfte jeweils alle Verschiebungen und Verdrehungen an den Punkten 1 und 2.

Aufgabe 14

Schwierigkeitsgrad mittel

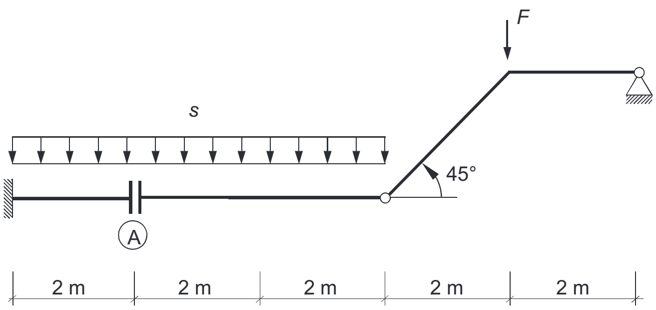


gegeben:
F = 80 kN
EI = 25.000 kNm²
EA = 200.000 kN

a) Berechnen Sie für die gegebene Belastung den Momenten- und Normalkraftverlauf.
b) Bestimmen Sie mithilfe des Prinzips der virtuellen Kräfte die vertikale Verschiebung und Verdrehung des Knotens A.
c) Bestimmen Sie mithilfe des Prinzips der virtuellen Kräfte die vertikale Verschiebung und Verdrehung des Knotens A für den Fall, dass für die Stäbe 1 + 2 gilt: $EA \to \infty$ und $EI \to \infty$.

Aufgabe 15

Schwierigkeitsgrad mittel

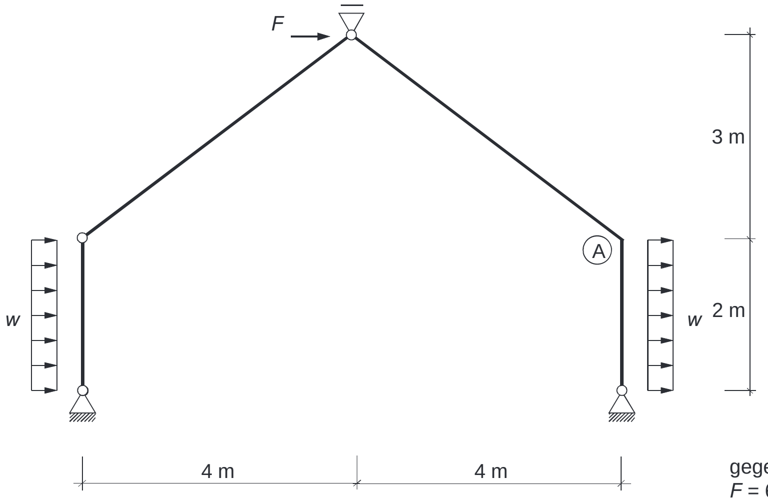


gegeben:
F = 10 kN
s = 4 kN/m
EI = 20.000 kNm²
EA = 150.000 kN

a) Berechnen Sie für die gegebene Belastung den Momenten- und Normalkraftverlauf.
b) Bestimmen Sie mithilfe des Prinzips der virtuellen Kräfte die vertikale Verschiebung rechts und links vom Gelenk A.

Aufgabe 16

Schwierigkeitsgrad
mittel



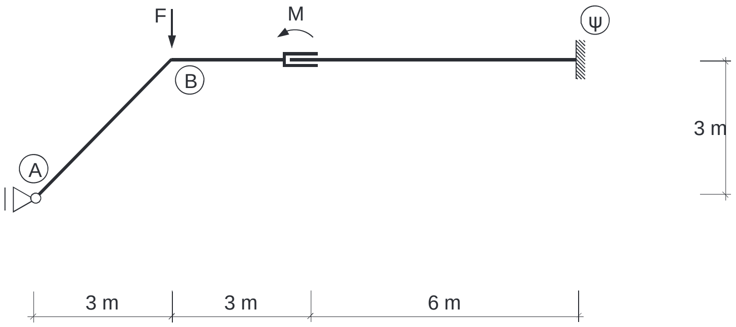
gegeben:
F = 60 kN
w = 15 kN/m
EI = 25.000 kNm²
EA = 100.000 kN

a) Berechnen Sie für die gegebene Belastung den Momenten- und Normalkraftverlauf.

b) Bestimmen Sie mithilfe des Prinzips der virtuellen Kräfte die horizontale Verschiebung des Knotens A.

Aufgabe 17

Schwierigkeitsgrad
mittel



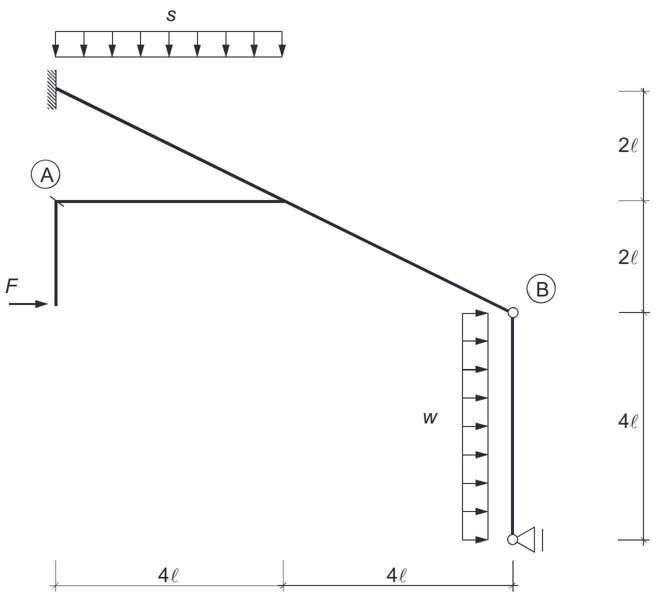
gegeben:
F = 20 kN
M = 30 kNm
EI = 40.000 kNm²
EA = 400.000 kN

a) Berechnen Sie für die gegebene Belastung den Momenten- und Normalkraftverlauf.

b) Bestimmen Sie mithilfe des Prinzips der virtuellen Kräfte die vertikale Verschiebung des Auflagers A und die Verdrehung des Knoten B.

Aufgabe 26

Schwierigkeitsgrad
schwer

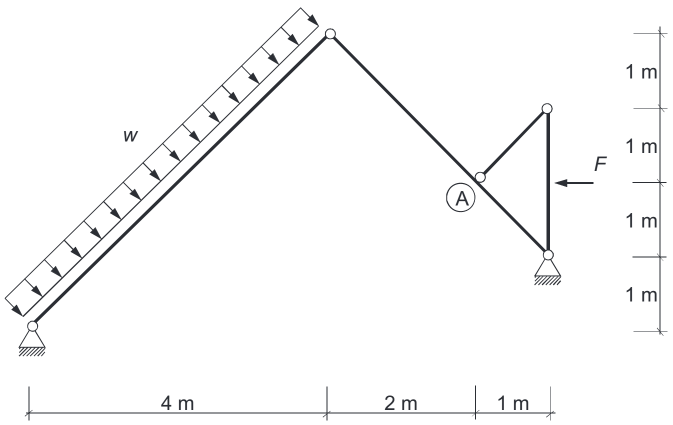


gegeben:
F = 100 kN
w = 20 kN/m
s = 15 kN/m
ℓ = 2 m
EI = 30.000 kNm²
EA = 150.000 kN

a) Berechnen Sie für die gegebene Belastung den Momenten- und Normalkraftverlauf.
b) Bestimmen Sie mithilfe des Prinzips der virtuellen Kräfte die Verdrehung des Knotens A und die vertikale Verschiebung des Knotens B.

Aufgabe 27

Schwierigkeitsgrad
schwer

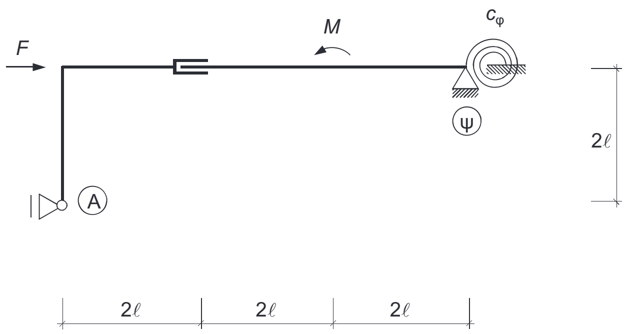


gegeben:
F = 35 kN
w = 10 kN/m
EI = 30.000 kNm²
EA = 150.000 kN

a) Berechnen Sie für die gegebene Belastung den Momenten- und Normalkraftverlauf.
b) Bestimmen Sie mithilfe des Prinzips der virtuellen Kräfte alle Verschiebungen des Punktes A.

Aufgabe 28

Schwierigkeitsgrad
schwer

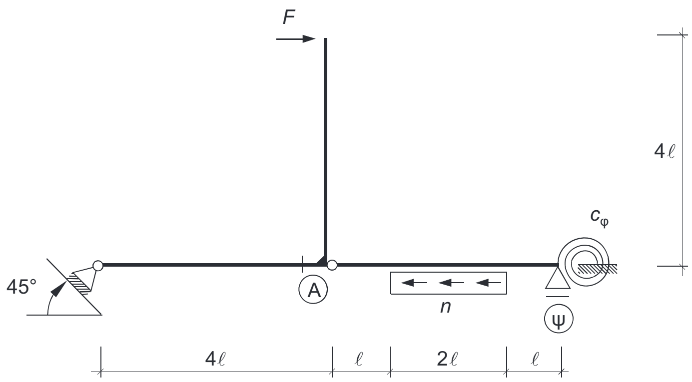


gegeben:
F = 3 kN
M = 10 kNm
EI = 25.000 kNm²
EA = 200.000 kN
ℓ = 2 m
c_φ = 55 kNm/rad

a) Berechnen Sie für die gegebene Belastung den Momenten- und Normalkraftverlauf.
b) Bestimmen Sie mithilfe des Prinzips der virtuellen Kräfte die Verdrehung der Feder und die vertikale Verschiebung des Auflagers A.

Aufgabe 29

Schwierigkeitsgrad
schwer



gegeben:
F = 20 kN
n = 5 kN/m
EI = 25.000 kNm²
EA = 200.000 kN
ℓ = 2 m
c_φ = 50 kNm/rad

a) Berechnen Sie für die gegebene Belastung den Momenten-, Querkraft- und Normalkraftverlauf.
b) Bestimmen Sie mithilfe des Prinzips der virtuellen Kräfte die Verdrehung der Feder und die horizontale Verschiebung des Knotens A.